НАУЧНОЕ ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

ШАРИПОВ Р. А.

МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ КАК 3D-БРАНЫ

Монография, часть I

УФА 2024

«Есть только миг между прошлым и будущим, именно он называется жизнь!» Это слова из песни к кинофильму «Земля Санникова». Они как нельзя лучше подошли бы в качестве эпиграфа к данной книге.

Для человека миг — это его текущие мысли и ощущения. Или действия, которые он сейчас совершает. Для вселенной миг растянут по всем её огромным просторам и включает в себя все происходящие сейчас события, на каком бы удалении от нас они ни происходили. Такой миг можно представлять себе в форме трёхмерной плёнки или мембраны, которую для краткости называют 3D-браной. Она отделяет четырёхмерный массив прошлого от четырёхмерного массива будущего.

Альберт Эйнштейн в своей теории относительности соединил пространство и время в один четырёхмерный континуум. Он запретил проводить границу между прошлым и будущим в таком континууме, назвав её условной и зависящей от наблюдателя. По мнению автора данной электронной книги пора вернуться обратно к представлениям Исаака Ньютона и провести границу между прошлым и будущим. Но теперь, на новом витке развития, эта граница уже не плоская, а гибкая. Она может изгибаться, что проявляется через гравитационное линзирование. Эта граница также может растягиваться, что проявляется в форме расширения вселенной и разбегания далёких галактик во все стороны от нас.

В качестве бонуса в новой теории, которая излагается в данной книге, появляется возможность двигаться быстрее скорости света. Она реализуется в частицах тёмной материи, названных супербрадионами. Эти частицы придумал Луис Гонзалез Местрес. Он же дал им такое название.

ISBN 978-5-600-04170-7

9 785600 041707 >

НАУЧНОЕ ЭЛЕКТРОННОЕ ИЗДАНИЕ

ШАРИПОВ Р. А.

МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ КАК 3D-БРАНЫ

Монография, часть I

Издатель Р. А. Шарипов
УФА 2024

УДК 514.822
ББК 22.313
Ш25

Авторское научное электронное издание, в котором автор является также и издателем.

Подготовка книги к изданию выполнена методом компьютерной верстки на базе пакета $\mathcal{AMS}$-TEX от Американского Математического Общества. При этом были использованы кириллические шрифты семейства Lh, распространяемые Ассоциацией *CyrTUG* пользователей кириллического TEX'а.

Шарипов Р. А.
Ш25 Модель вселенной как 3D-браны: Монография, часть I / Р. А. Шарипов. — Уфа: Издатель Р. А. Шарипов, 2024. — 122 с.

ISBN 978-5-600-04170-7

Книга является первой из серии книг, в которых излагается новая неэйнштейновская теория гравитации, получившая название «Модель вселенной как 3D-браны». Книга адресована студентам, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в области математической физики, астрофизики, космологии, астрономии и физики элементарных частиц.

УДК 514.822
ББК 22.313

ISBN 978-5-600-04170-7

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

В истории физики были периоды постепенного накопления и осмысления сведений о природе, которые сменялись периодами революционных изменений взглядов на природу. Один из таких периодов революционных перемен связан с появлением теории относительности Альберта Эйнштейна и с появлением квантовой механики, авторство которой принадлежит целому ряду учёных. По моему мнению этот революционный период ещё не закончен и мы можем ожидать некоторых корректировок в картине мира, которую нам рисует теория относительности и квантовая механика.

Модель вселенной как 3D-браны — это новая неэйнштейновская теория гравитации, основанная на критике и корректировке понятия пространства-времени. В данной книге излагается первая часть этой теории, охватывающая период её развития с лета 2022 по весну 2024 года. Она включает

— изложение доводов в пользу необходимости внесения изменений в теорию относительности;
— формулировку основных понятий новой теории;
— вывод уравнений гравитации в новой теории;
— вывод закона сохранения полной энергии в новой теории;
— вывод формул для плотности энергии гравитационного поля и плотности потока энергии гравитационного поля в новой теории;
— описание движения классических (не квантовых) частиц материи в гравитационном поле в рамках новой теории.

Содержание дальнейших частей новой теории определится со временем по мере её дальнейшего развития.

Август, 2024 г. Р. А. Шарипов.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СТРУКТУРЫ.

§ 1. Критика пространства-времени.

Пространство-время — это четырёхмерный континуум, который был получен путём соединения трёхмерного пространства и одномерного времени. Он лежит в основе как специальной, так и общей теории относительности (см. [1–3]). В специальной теории относительности это плоский континуум. В общей теории относительности этот континуум наделяется кривизной, которая определяется гравитационным полем.

Точки пространства-времени называются событиями, а само пространство-время включает в себя все события, которые случились где-либо и когда-либо. Это означает, что оно включает в себя прошлое, настоящее и будущее. Граница между прошлым и будущим в теории относительности определена нечётко, она зависит от наблюдателя. Это обстоятельство называется относительностью одновременности. Оно приводит к парадоксу, получившему название парадокс Андромеды (см. [4] и [5], стр. 303-304). В несколько иной формулировке он известен как парадокс Наполеона (см. [6]).

В философской литературе парадокс Андромеды известен как аргумент Ритдэйка-Патнэма (см. [7] и [8]). Он считается аргументом в пользу четырёхмерности физической вселенной. Однако в действительности он демонстрирует противоречие между четырёхмерностью и здравым смыслом.

Вместо рассмотрения всей вселенной можно ограничиться какой-то её частью. Например, земным шаром. Тогда получится цилиндрическая структура, изображённая на рисунке 1.1. Такая цилиндрическая структура по форме напоминает колбасу. Поэтому её можно назвать пространственно-временной колбасой. В эту колбасу укладывается вся история планеты Земля, которая включает в себя период газопылевого облака и первичной Земли, период появления жидкой воды и зарождения жизни, эпоху динозавров, эпоху млекопитающих, появление человека, наше настоящее, то есть текущий момент времени, а также всё наше будущее.

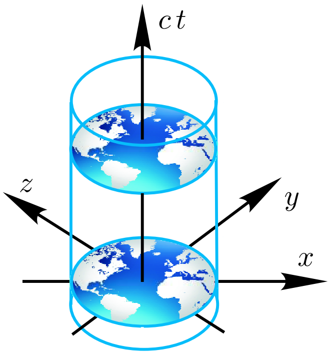

Рис. 1.1

Главный вопрос к теории относительности, связанный с пространством-временем, формулируется так.

Вопрос 1.1. *Является ли четырёхмерное пространство-время физическим континуумом? Или это лишь продукт нашего ума — математическая абстракция, которой ничего не соответствует в реальности?*

Этот вопрос обсуждается среди философов (см. [9]). Физики обходят его стороной, полагаясь на авторитет теории относительности Эйнштейна. В ней по умолчанию пространство-время считается физическим континуумом. Действительно, в ней уравнения гравитации пишутся в четырёхмерном формализме, уравнения электродинамики Максвелла переписываются в четырёхмерной форме, уравнения движения материальных тел и различных материальных сред также стремятся привести к четырёхмерной форме.

Выбор в пользу того, что пространство-время является физическим континуумом, — это ответственное решение. Из этого выбора следует, что пространственно-временная колбаса, содержащая всю историю Земли — это физический объект. В нем в первозданном виде содержится и газопылевое облако, и первичная горячая Земля, и первые океаны с первыми бактериями, и динозавры и мамонты с саблезубыми тиграми. Более того, в пространственно-временной колбасе содержится все наше будущее, которое ещё не наступило.

Раз прошлое не исчезает, сохраняясь в пространственно-временной колбасе, и раз будущее предопределено и уже сформировано в пространственно-временной колбасе, в теории относительности Эйнштейна имеется потенциальная возможность перемещения во времени назад в прошлое и вперёд в будущее. Хотя механизм таких перемещений и не прописан, они очень популярны в жанре научной фантастики. **Но ни во времена Эйнштейна, ни сейчас не было и нет экспериментальных демонстраций перемещений во времени. Поэтому положение о том, что пространство-время — физический континуум, является <u>не доказанным и спорным моментом</u> в основаниях теории относительности Эйнштейна.**

§ 2. Трёхмерная вселенная и её изображение в форме 3D-бран.

Возвращаясь к основному вопросу 1.1, подчеркнём, что в отличие от теории относительности ответ на него в новой теории отрицательный. Это значит, что пространство время не является физическим континуумом. Однако мы не отказываемся от понятия четырёхмерного пространства-времени полностью и используем его как ценный математический инструмент для выборочного переноса отдельных результатов из теории относительности в новую теорию.

Пространство-время в теории относительности — это вещественное четырёхмерное многообразие, оснащённое тремя геометрическими структурами: 1) псевдоримановой метрикой с сигнатурой $(+,-.-,-)$, 2) ориентацией, 3) поляризацией (см. [3]). Наблюдатель в теории относительности — это одушевлённый объект, размеры которого малы по сравнению с планетами, звёздами и галактиками, что позволяет рассматривать его как точечный объект. Перемещение наблюдателей в пространстве-времени изображается в форме их мировых линий. На рисунке 2.1 показаны мировые линии двух наблюдателей. В каждой точке они проходят внутри световых конусов, определяемых метрикой пространства-времени. Движение наблюдателей по мировым линиям идёт от прошлого через настоящее к будущему, что определяется поляризацией пространства-времени. В нашем случае это движение снизу вверх.

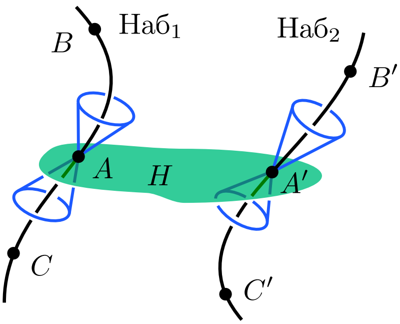

Рис. 2.1

Рассмотрим отдельно первого наблюдателя на рисунке 2.1. Пусть точка A — точка настоящего для первого наблюдателя. Она имеет материальную бытность, то есть имеет прообраз в реальной физической вселенной. Точка C — это точка прошлого для первого наблюдателя. Она имела, но утратила свою материальную бытность, оставшись в прошлом. Точка B, точка будущего для первого наблюдателя, ещё не приобрела свою материальную бытность. Таким образом на каждой мировой линии в каждый миг только одна точка имеет материальную бытность. Но это свойство (материальная бытность) является переходящим. Оно переходит от одной точки к другой по мере развёртывания событий в реальной физической вселенной.

Рассмотрим вновь первого наблюдателя на рисунке 2.1, находящегося в точке A в своём настоящем. Находясь в этой точке, он понимает, что в этот миг он не один во вселенной.

Где-то есть какой-то второй наблюдатель, который в этот миг находится в некоторой точке A' на своей мировой линии. Мы знаем, что мгновенная передача данных в теории относительности запрещена. Запрещена она и в новой теории. Точки A и A' не связаны друг с другом никакими сигналами. Их объединяет только одно — **совместная материальная бытность**. Совместная материальная бытность между точками A и A' имеется в настоящем. Но такая связь между точками двух мировых линий могла иметься в прошлом и может образоваться в будущем. Например, точка C на мировой линии первого наблюдателя могла иметь совместную материальную бытность с некоторой точкой C' на мировой линии второго наблюдателя, если второй наблюдатель в тот момент существовал, то есть был рождён, но ещё не умер. Аналогичным образом точка B на мировой линии первого наблюдателя будет иметь совместную материальную бытность с некоторой точкой B' на мировой линии второго наблюдателя, если второй наблюдатель на тот момент будет существовать, то есть будет рождён, но ещё не умрёт.

В дальнейшем мы рассматриваем свойство **совместной материальной бытности** как бинарное отношение эквивалентности (см. [10] или § 2 в главе I из [11]) на пространстве-времени независимо от того, когда оно имеет место быть — в прошлом, в настоящем или в будущем. Мы не ограничиваем его точками мировых линий одушевлённых наблюдателей и распространяем на точки мировых линий неодушевлённых предметов, а также на точки вакуума из межзвёздного пространства и точки вакуума внутри вакуумных камер созданных человеком аппаратов. Бинарное отношение **совместной материальной бытности** разбивает пространство-время на попарно не пересекающиеся **классы совместной материальной бытности**. Один из таких классов, а именно класс совместной материальной бытности точек A и A' изображён на рисунке 2.1 в форме окрашенного пятна.

Чисто умозрительно форма и структура классов совместной материальной бытности может быть любой. Они могут быть гладкими структурами, или фракталами, или даже совсем бесструктурными множествами. Но мы предпочитаем иметь дело с гладкими структурами и постулируем то, что они являются гладкими ориентируемыми трёхмерными многообразиями, то есть 3D-бранами.

На 3D-браны классов совместной материальной бытности накладывается естественное требование пространственноподобности. Оно означает, что касательные гиперплоскости к этим бранам во всех точках пересекаются с соответствующими световыми конусами только по их вершинам.

Из сказанного выше в новой теории складывается следующая картина мира. Реальная физическая вселенная трёхмерна. Она эволюционирует и каждый момент её эволюции изображается в форме 3D-браны в четырёхмерном пространстве-времени. Эти 3D-браны заполняют всё пространство-время за исключением быть может одной точки, которая соответствует Большому взрыву (см. [12]). Таким образом, новая теория гравитации, рассматриваемая в этой книге, отрицает материальную бытность всего пространства-времени в целом и превращает его в коллекцию математических образов реальной физической вселенной, полученных в различные моменты её эволюции. Она наделяет пространство-время теории относительности ещё одной геометрической структурой — расслоением пространственноподобных 3D-бран. В дальнейшем мы будем считать пространство-время вещественным четырёхмерным многообразием, оснащённым четырьмя геометрическими структурами: 1) псевдоримановой метрикой с сигнатурой $(+,-.-,-)$, 2) ориентацией, 3) поляризацией, 4) расслоением пространственноподобных 3D-бран, заполняющим его целиком за исключением быть может одной точки, соответствующей Большому взрыву. Пространство-время с такими структурами служит фактором преемственности и мостом между теорией относительности и новой теорией.

§ 3. Поле единичных нормалей и сопутствующие пространственные координаты.

По результатам предыдущего параграфа пространство-время теперь оснащено расслоением пространственноподобных 3D-бран. 3D-браны покрывают все пространство-время за исключением быть может одной точки, соответствующей Большому взрыву. Если исключить эту точку, то через каждую из оставшихся точек P проходит ровно одна 3D-брана. Пространственноподобность бран означает, что перпендикуляры к ним времениподобны. Ориентируемость бран и наличие метрики и поляризации в пространстве-времени позволяет выбрать векторы единичных нормалей к бранам $\mathbf{n}(P)$ направленными в сторону будущего и гладким образом меняющимися при переходе от точки к точке в пределах отдельных бран и при переходе от одних бран к другим:

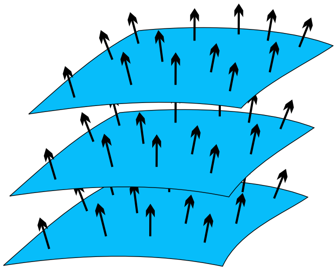

Рис. 3.1

$$|\mathbf{n}(P)| = 1. \tag{3.1}$$

Векторы единичных нормалей к бранам из (3.1) составляют гладкое векторное поле в расслоении 3D-бран. Оно показано на рисунке 3.1. Мы не можем изобразить трёхмерные браны в четырёхмерном пространстве, поэтому на рисунке они изображены как двумерные браны в трёхмерном пространстве.

Со всяким векторным полем связано семейство силовых линий этого поля (см. [13]). Это линии, касательный вектор которых в каждой их точке направлен вдоль вектора поля в этой точке. Силовые линии по-

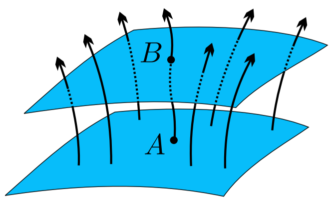

Рис. 3.2

ля единичных нормалей $\mathbf{n}$ показаны на рисунке 3.2.

Понятие силовой линии очень похоже на понятие интегральной линии для векторного поля (см. [14]). Разница заключается в параметризации. Интегральные линии векторного поля — это параметрические линии, касательный вектор которых в их параметризации в каждой их точке совпадает с вектором поля в этой точке. Геометрически, как множества точек, интегральные линии векторного поля совпадают с силовыми линиями. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать различий между силовыми и интегральными линиями поля $\mathbf{n}$ на рисунке 3.2.

Выберем какие-либо произвольные криволинейные координаты x, y, z на одной из 3D-бран на рисунке 3.2, скажем на нижней, и введём обозначения:

$$x^1 = x, \qquad\qquad x^2 = y, \qquad\qquad x^3 = z. \tag{3.2}$$

Считается, что использование верхних индексов для нумерации координат и некоторые другие соглашения по индексам придумал Эйнштейн. Они составляют эйнштейновскую тензорную нотацию по использованию индексов (см. § 20 в главе I из [15]). При помощи силовых линий векторного поля единичных нормалей $\mathbf{n}$ (см. рисунок 3.2) координаты (3.2) можно распространить с первоначально выбранной 3D-браны на все другие браны как вверх в направлении будущего, так и вниз в направлении прошлого. Полученные таким способом координаты называются сопутствующими координатами.

Определение 3.1. Три гладкие функции x, y, z, определённые глобально на всем пространстве-времени или локально в некоторой его области, называются сопутствующими пространственными координатами, если их значения не меняются при движении вдоль силовых линий векторного поля единичных нормалей к 3D-бранам и если они становятся глобальными или локальными координатами на бране после сужения на любую из 3D-бран.

Выбор сопутствующих координат не единственен. Мы можем заменять одни сопутствующие координаты на другие. Такая замена сопутствующих координат осуществляется в пределах какой-то одной отдельной 3D-браны и затем распространяется на все другие браны. Поэтому мы получаем следующие формулы перехода от одних сопутствующих пространственных координат к другим:

$$\begin{cases}\tilde{x}^1=\tilde{x}^1(x^1,x^2,x^3),\\ \tilde{x}^2=\tilde{x}^2(x^1,x^2,x^3),\\ \tilde{x}^3=\tilde{x}^3(x^1,x^2,x^3),\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x^1=x^1(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3),\\ x^2=x^2(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3),\\ x^3=x^3(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3).\end{cases}\tag{3.3}$$

Пространство-время четырёхмерно. Но в (3.3) мы видим только три координаты. Четвёртая координата при замене сопутствующих координат не участвует.

§ 4. Сопутствующие наблюдатели и состояние абсолютного покоя.

Вспомним, что 3D-браны, составляющие новую четвертую геометрическую структуру в пространстве-времени, являются пространственноподобными гиперповерхностями. Вектора единичных нормалей к ним времениподобны. Это означает, что силовые линии поля единичных нормалей $\mathbf{n}$ к бранам, показанные на рисунке 3.2, могут служить мировыми линиями некоторых наблюдателей в пространстве-времени. Такие наблюдатели называются сопутствующими.

Определение 4.1. Наблюдатели, сопутствующие координаты которых не меняются с течением времени, называются сопутствующими наблюдателями.

Сопутствующие наблюдатели движутся перпендикулярно 3D-бранам от прошлого к будущему. В направлении вдоль бран они не перемещаются. Поэтому считается, что они находятся в состоянии покоя. Это состояние абсолютного покоя, поскольку оно не привязано к каким-то материальным объектам во вселенной. Сопутствующие координаты являются выделенными системами координат во вселенной, определяющими состояние абсолютного покоя.

Вопрос 4.1. *Является ли наличие выделенных координат, определяющих состояния абсолютного покоя, необходимым условием в новой теории?*

Ответ на это вопрос отрицательный. Выделенные координаты появляются в новой теории вследствие того, что мы не отказываемся полностью от наследия теории относительности Эйнштейна и сохраняем понятие пространства-времени, хотя и понижаем его статус до уровня нематериальной математической абстракции. В принципе возможно построение теории трёхмерной вселенной без использования понятия пространства-времени. В такой теории выделенных систем координат и состояния абсолютного покоя может не быть.

Вопрос 4.2. *Является ли наличие выделенных координат, определяющих состояния абсолютного покоя, возвратом к теории эфира?*

В какой-то степени да. Хотя классический светоносный эфир 19-го века является средой, в которой распространяется свет. В нашем случае сопутствующие координаты и определяемое ими состояние абсолютного покоя ни с какой материальной средой не связаны.

Вопрос 4.3. *Является ли наличие выделенных координат, определяющих состояния абсолютного покоя, возвратом к абсолютному ньютоновскому трёхмерному пространству?*

В какой-то степени да. Но ньютоновское трёхмерное пространство плоское и неизменное. В нашем случае метрика на разных 3D-бранах может быть разной и не плоской. Это значит, что метрика в нашей трёхмерной вселенной может быть не плоской и меняющейся со временем. То есть вселенная в нашей теории может расширяться или сжиматься в отдельных местах или глобально в целом.

§ 5. Мембранное время.

Определение 5.1. Гладкая числовая функция t на пространстве-времени называется мембранным временем, если её значения не меняются в пределах каждой 3D-браны из расслоения 3D-бран и если она строго монотонно возрастает в направлении от прошлого к будущему.

Мы знаем, что 3D-браны соответствуют различным этапам в эволюции реальной трёхмерной вселенной. Мембранное время нумерует этим этапы, присваивая каждому из них какое-то числовое значение из множества вещественных чисел.

Выбор мембранного времени не единственен. Замена одного мембранного времени другим задаётся формулами

$$\tilde{t} = \tilde{t}(t), \qquad\qquad t = t(\tilde{t}). \tag{5.1}$$

Преобразования (5.1) называются масштабированием мембранного времени. На гладкие функции одного переменного в (5.1) накладываются дополнительные условия

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} > 0, \qquad\qquad \frac{dt}{d\tilde{t}} > 0. \tag{5.2}$$

Условия (5.2) обеспечивают строгую монотонность функций $\tilde{t}(t)$ и $t(\tilde{t})$ в формулах (5.1).

Применительно к реальной трёхмерной физической вселенной мембранное время является глобальным временем, определённым и одинаковым во всех её точках. Но будучи просто маркером, нумерующим 3D-браны и отличающим их друг от друга в расслоении 3D-бран, мембранное время не обязано совпадать с временем, измеряемым каким-либо прибором.

§ 6. Постулат эквидистантности и отказ от него.

Первая версия новой теории гравитации, название которой совпадает с названием данной книги, была разработана в серии публикаций [16–21]. Работам [16–21] предшествовала работа [22]. Результаты работ [16–21] докладывались на конференциях [23–27]. Первая версия теории строилась с использованием следующего постулата эквидистантности.

Постулат 6.1. *Для любых двух 3D-бран из расслоения 3D-бран в пространстве-времени длины всех отрезков силовых линий векторного поля единичных нормалей* $\mathbf{n}$*, заключённых между этими двумя 3D-бранами, одинакова.*

Позже я сообразил, что постулат эквидистантности 6.1 не нужен. Во второй версии теории он был исключён, см. работы [28–33] и доклады на конференциях [34–37]. Вторая версия теории без постулата эквидистантности является более общей. Поэтому далее в этой книге излагается она.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 1. Скорость света и её аналоги.

Скорость света в вакууме — это скорость распространения электромагнитных волн в пустом пространстве. В соответствии с этим мы будем обозначать её через c_{el}. Вообще говоря, это экспериментально измеряемая величина. Однако в 1983 году резолюцией № 1, принятой на 17-ом заседании, Генеральная конференции по мерам и весам постановила определять эталон длины в 1 метр через скорость света в вакууме. После этого величина c_{el} получила точное числовое значение

$$c_{\text{el}} = 299792458 \text{ м/с}, \tag{1.1}$$

(см. [38]). Помимо единицы длины в формуле (1.1) используется единица времени. Это секунда. С 1967 года 1 секунда определяется как 9192631770 периодов колебаний излучения, соответствующего переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры в основном состоянии атома изотопа цезия-133 (см. [39] и [40]).

В теории относительности Эйнштейна скорость света используется во многих ролях. Помимо того что она определяет скорость распространения электромагнитных волн, она присутствует в уравнениях гравитационного поля и она определяет предел скорости движения массивных материальных тел. Материальные тела, которые мы наблюдаем в повседневной жизни, состоят из материи, которую в астрофизике называют светлой или барионной материей. Помимо неё имеется так называемая тёмная материя (см. [41]). Она не обнаруживается прямыми наблюдениями и экспериментами. Её присутствие подтверждается косвенным путём через определение скоростей звёзд на периферииях галактик (см. [42]) и через гравитационное линзирование (см. [43]). Поскольку на сегодняшний день нет никакой возможности экспериментального измерения предельной скорости для тёмной материи, то нет никаких оснований считать, что эта скорость совпадает с константой (1.1). Всего в данной книге мы будем рассматривать четыре константы скорости:

$$c_{\mathrm{el}}, \qquad c_{\mathrm{gr}}, \qquad c_{\mathrm{br}}, \qquad c_{\mathrm{nb}}. \tag{1.2}$$

Первая из констант (1.2) совпадает с константой (1.1). Вторая используется в уравнениях гравитации. Третья — это предельная скорость для барионной материи. Четвёртая константа — предельная скорость для небарионной материи. Поскольку сейчас мы ничего не знаем о структуре тёмной материи, мы допускаем, что она может разделяться на несколько сортов, и у каждого сорта тёмной материи может быть своё значение константы c_{nb}.

В новой теории гравитации, которая рассматривается в этой книге нет никаких априорных запретов на то, чтобы все константы (1.2) были различны. И если эксперимент показывает совпадение каких-то из них, то этому должно быть дано отдельное теоретическое обоснование. Теорию относительности Эйнштейна мы таким обоснованием не считаем в силу тех возражений к ней, которые были высказаны в § 1 из первой главы этой книги.

§ 2. Редукция четырёхмерной метрики к трёхмерной.

Основываясь на критике пространства-времени из § 1 первой главы, мы понизили его статус до уровня математической абстракции, которой не соответствует никакое реальное четырёхмерное физическое пространство. В новой теории мы не отказываемся от понятия пространства-времени полностью, сохраняя его как полезную математическую абстракцию.

В § 2 первой главы было сказано, что пространство-время оснащено четырьмя геометрическими структурами: 1) псевдоримановой метрикой с сигнатурой $(+, -.-, -)$, 2) ориентацией, 3) поляризацией, 4) расслоением пространственноподобных 3D-бран, заполняющим его целиком за исключением быть может одной точки, соответствующей Большому взрыву. Первые три из этих структур заимствуются из теории относительности Эйнштейна. Четвёртая добавляется в новой теории на основе рассуждений из § 2 первой главы. Разберём роль этих структур. Ориентация не позволяет смешиваться левому и правому в размерности четыре и не даёт возможности пространству-времени быть чем-то плохим типа листа Мёбиуса (см. [44]).

Поляризация указывает направление от прошлого к будущему. В § 3 первой главы она позволила нам выбрать поле единичных нормалей к 3D-бранам, направленное в будущее. Наличие первых трёх структур и пространственноподобность 3D-бран индуцирует трёхмерную ориентацию на них. То есть в 3D-бранах левое и правое в размерности три тоже не могут перемешиваться, а сами 3D-браны не могут быть чем-то плохим типа листа Мёбиуса (см. [44]). Это естественно, поскольку 3D-браны в нашей теории являются образами реальной физической вселенной в различные моменты её эволюции.

Псевдориманова метрика является основной количественной характеристикой пространства-времени. В произвольной системе координат x^0, x^1, x^2, x^3 она задаётся симметричной матрицей G размером 4×4. Её компоненты

$$G_{ij} = G_{j\,i}, \text{ где } 0 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{2.1}$$

В § 3 первой главы мы построили три специальные пространственные координаты (3.2), связанные с расслоением 3D-бран и полем единичных нормалей $\mathbf{n}$ к ним. Они были названы сопутствующими координатами, см. определение 3.1. Далее в § 5 мы определили мембранное время t, см. определение 5.1. При помощи мембранного времени мы дополняем пространственные сопутствующие координаты (3.2) до полной системы координат в четырёхмерном пространстве-времени:

$$x^0 = c_{\mathrm{gr}}\, t, \qquad x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = z. \tag{2.2}$$

Заметьте, что в (2.2) мы используем не скорость света c_{el} из формулы (1.1), а вторую константу из (1.2).

С координатами (2.2) связаны векторы

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \qquad \mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{\partial}{\partial x^3}. \tag{2.3}$$

Из определения 5.1 в первой главе следует, что отдельные 3D-браны можно выделять условиями вида $t = \mathrm{const}$. Поэтому последние три вектора в (2.3) являются касательными к 3D-бранам. Из определения 3.1 в первой главе следует, что отдельные силовые линии векторного поля $\mathbf{n}$ можно выделять условиями вида $x^1 = \mathrm{const}_1$, $x^2 = \mathrm{const}_2$, $x^3 = \mathrm{const}_3$. Поэтому вектор $\mathbf{e}_0$ является касательным к силовым линиям поля $\mathbf{n}$ и направлен в будущее вдоль вектора нормали $\mathbf{n}$. Отсюда

$$\mathbf{e}_0 \perp \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_0 \perp \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_0 \perp \mathbf{e}_3. \tag{2.4}$$

Для компонент псевдоримановой метрики (2.1) в координатах (2.2) соотношения (2.4) означают, что

$$\begin{aligned} &G_{12} = 0, && G_{13} = 0, && G_{23} = 0,\\ &G_{21} = 0, && G_{31} = 0, && G_{32} = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *В специальных координатах (2.2), полученных соединением пространственных сопутствующих коорди-*

нат и мембранного времени, матрица псевдоримановой метрики (2.1) *удовлетворяет соотношениям* (2.5) *и потому становится блочно-диагональной.*

Исходя из сигнатуры $(+,-,-,-)$ псевдоримановой метрики в пространстве-времени, запишем сформулированный в теореме 2.1 результат в следующем виде:

$$G_{ij} = \begin{Vmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{11} & -g_{12} & -g_{13} \\ 0 & -g_{21} & -g_{22} & -g_{23} \\ 0 & -g_{31} & -g_{32} & -g_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2.6}$$

Все компоненты матрицы (2.6) являются функциями координат (2.2). Их также можно рассматривать как функции трёх пространственных сопутствующих координат и мембранного времени. Никаких других систем координат в этой книге рассматриваться не будет. Величины из нижнего диагонального блока в (2.6) определят трёхмерную евклидову метрику на бранах, которая соответствует зависящей от времени евклидовой метрике в реальной физической вселенной:

$$g_{ij} = g_{ij}(t, x^1, x^2, x^3), \text{ где } 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{2.7}$$

При заменах сопутствующих координат (3.3) из первой главы они преобразуются так:

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{kq} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \tilde{x}^j}, \qquad g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} \tilde{g}_{kq} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j}. \tag{2.8}$$

Формулы (2.8) являются правилами преобразования трёхмерного тензорного поля валентности $(0,2)$.

Величина g_{00} из верхнего диагонального блока матрицы (2.6) является скалярной функцией на 3D-бранах, которая соответствует зависящей от времени скалярной функции в реальной физической вселенной:

$$g_{00} = g_{00}(t, x^1, x^2, x^3). \tag{2.9}$$

При заменах сопутствующих координат (3.3) из первой главы функция (2.9) ведёт себя как скаляр, то есть не изменяется. Но при преобразовании масштабирования мембранного времени (5.1) из первой главы она преобразуется так:

$$\tilde{g}_{00} = g_{00} \left(\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}\right)^2, \qquad g_{00} = \tilde{g}_{00} \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t}\right)^2. \tag{2.10}$$

Формулы (2.10) являются правилами преобразования одномерного тензорного поля валентности $(0, 2)$.

Величины (2.7) при преобразованиях масштабирования времени (5.1) из первой главы ведут себя как скаляры. Они не меняются. Меняется только аргумент времени в них.

Скалярная функция (2.9) и компоненты метрики (2.7) образуют полный набор динамических переменных, описывающих гравитационное поле в новой теории. С учётом симметрии матрицы (2.7) число таких динамических переменных равно 7. Для сравнения в теории относительности Эйнштейна число динамических переменных, описывающих гравитационное поле, равно 10.

§ 3. Уравнения Эйнштейна.

Уравнения Эйнштейна, описывающие гравитационное поле в теории относительности Эйнштейна, мы запишем так:

$$r_{ij} - \frac{r}{2}\, G_{ij} - \Lambda\, G_{ij} = \frac{8\,\pi\,\gamma}{c_{\text{gr}}^4}\, T_{ij}. \tag{3.1}$$

Форма записи уравнений Эйнштейна (3.1) слегка отличается от той, что можно найти в Википедии [45]. Главное отличие в знаке перед Λ. Такой выбор сделан для совпадения обозначений с книгой [3]. В силу возникшего отличия в знаке мы здесь выбираем значение космологической константы, отличающееся знаком от [46]:

$$\Lambda \approx\ -1,0905 \cdot 10^{-56}\ \text{см}^{-2}. \tag{3.2}$$

Помимо (3.2) в уравнениях Эйнштейна (3.1) имеется ещё одна константа γ. Это гравитационная постоянная Ньютона

$$\gamma \approx\ 6,674 \cdot 10^{-8}\ \text{см}^3\ \cdot\ \text{г}^{-1}\ \cdot\ \text{с}^{-2}, \tag{3.3}$$

которая входит в закон всемирного тяготения (см. [47] и [48]). Буква γ использована для обозначения константы (3.3) с целью согласования обозначений с книгой [3].

Величины T_{ij} в правой части уравнения (3.1) — это компоненты тензора энергии-импульса. Они определяются полями материи, в том числе и тёмной материи.

Величины r_{ij} в (3.1) — это компоненты тензора Риччи. Они вычисляются через компоненты метрики (3.1) в несколько шагов. Сначала вычисляются компоненты метрической связности — символы Кристоффеля:

$$\gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{s=9}^{3} G^{ks}\left(\frac{\partial G_{sj}}{\partial x^i} + \frac{\partial G_{is}}{\partial x^j} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^s}\right), \tag{3.4}$$

см. [49]. Далее вычисляются компоненты тензора кривизны:

$$r^k_{isj} = \frac{\partial \gamma^k_{ji}}{\partial x^s} - \frac{\partial \gamma^k_{si}}{\partial x^j} + \sum_{q=0}^{3} \gamma^k_{sq}\,\gamma^q_{ji} - \sum_{q=0}^{3} \gamma^k_{jq}\,\gamma^q_{si}, \tag{3.5}$$

см. [50]. Компоненты тензора Риччи получаются из компонент тензора кривизны (3.5) свёртыванием по паре индексов:

$$r_{ij} = \sum_{k=0}^{3} r^k_{ikj}, \tag{3.6}$$

см. [51]. Скалярная кривизна получается свёртыванием тензора Риччи (3.6) с обратным метрическим тензором:

$$r=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} r_{ij}\,G^{ij}, \tag{3.7}$$

см. [52]. Компоненты обратного метрического тензора в (3.4) и (3.7) обозначены буквой G с верхними индексами. Они составляют матрицу обратную к матрице (2.1).

§ 4. Редукция четырёхмерного тензора Риччи на 3D-браны.

Тензор Риччи (3.6) входит в уравнения Эйнштейна (3.1). Его редукция на 3D-браны состоит в подстановке блочно-диагональной матрицы (2.6) в формулы (3.4), (3.5) и (3.6). Трёхмерная метрика (2.7), входящая в состав матрицы (2.6), задаёт свой набор символов Кристоффеля:

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right). \tag{4.1}$$

Часть символов Кристоффеля (3.4) совпадает с символами Кристоффеля (4.1). А именно, можно показать, что

$$\gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}\ \text{ для }\ 1\leqslant i,j,k\leqslant 3. \tag{4.2}$$

Остальные компоненты символов Кристоффеля (3.4) вычисляются следующим образом:

$$\gamma^0_{ij}=\frac{\overset{-1}{g_{00}}}{2}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\ \text{ для }\ 1\leqslant i,j\leqslant 3, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\gamma^k_{0j}=\gamma^k_{j0}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} g^{ks}\,\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^0}=\\ =\sum_{s=1}^{3} g_{00}\,g^{ks}\,\gamma^0_{sj}\ \text{ для }\ 1\leqslant k,j\leqslant 3,\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\gamma^q_{00}=\frac{1}{2}\sum^3_{s=1}g^{qs}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^s}\quad\text{для}\quad 1\leqslant q\leqslant 3,\tag{4.5}$$

$$\gamma^0_{q0}=\gamma^0_{0q}=\frac{1}{2}\,g^{-1}_{00}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^q}\quad\text{для}\quad 1\leqslant q\leqslant 3,\tag{4.6}$$

$$\gamma^0_{00}=\frac{1}{2}\,g^{-1}_{00}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}.\tag{4.7}$$

Формулы (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) и (4.7) выводятся из (3.4) с использованием формулы (2.6).

Далее мы определим следующие величины:

$$b_{ij}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}.\tag{4.8}$$

При этом мы считаем, что в (4.8) выбраны специальные координаты (2.2). Величины (4.8) — это компоненты симметричного тензорного поля $\mathbf{b}$. Поднимая индексы в (4.8), мы произведём следующие величины:

$$b^k_j=\sum^3_{s=1}g^{ks}\,b_{sj},\qquad\qquad b^{ij}=\sum^3_{s=1}b^i_s\,g^{sj}.\tag{4.9}$$

При помощи введённых величин (4.8) и (4.9) формулы (4.3) и (4.4) можно переписать так:

$$\gamma^0_{ij}=g^{-1}_{00}\,b_{ij}\quad\text{для}\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3,\tag{4.10}$$

$$\gamma^k_{0j}=\gamma^k_{j\,0}=b^k_j\quad\text{для}\quad 1\leqslant k,j\leqslant 3.\tag{4.11}$$

Для вычисления компонент тензора Риччи по формуле (3.6) нужны не все компоненты тензора кривизны (3.5), а только те, для которых $s=k$:

$$r^k_{ikj}=\frac{\partial\gamma^k_{ji}}{\partial x^k}-\frac{\partial\gamma^k_{ki}}{\partial x^j}+\sum^3_{q=0}\gamma^k_{kq}\,\gamma^q_{ji}-\sum^3_{q=0}\gamma^k_{jq}\,\gamma^q_{ki}.\tag{4.12}$$

Применяя (4.2), (4.10) и (4.11) к (4.12), мы получим

$$\begin{gathered} r^k_{ikj} = R^k_{ikj} + g_{00}^{-1}\, b^k_k\, b_{ij} - \\ -\, g_{00}^{-1}\, b^k_j\, b_{ki} \ \text{ для } \ 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Здесь R^k_{ikj} — компоненты трёхмерного тензора кривизны. Они задаются формулой, похожей на (3.5):

$$R^k_{isj} = \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^k_{si}}{\partial x^j} + \sum_{q=1}^{3} \Gamma^k_{sq}\, \Gamma^q_{ji} - \sum_{q=1}^{3} \Gamma^k_{jq}\, \Gamma^q_{si}. \tag{4.14}$$

Компоненты трёхмерной связности в (4.14) звдаются формулой (4.1). А трёхмерный тензор Риччи даётся формулой

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{3} R^k_{ikj}, \tag{4.15}$$

которая аналогична (3.6).

Рассмотрим случай $k = 0$ и $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ в (4.12). В этом случае мы имеем следующее соотношение:

$$r^0_{i0j} = \frac{\partial \gamma^0_{ji}}{\partial x^0} - \frac{\partial \gamma^0_{0i}}{\partial x^j} + \sum_{q=0}^{3} \gamma^0_{0q}\, \gamma^q_{ji} - \sum_{q=0}^{3} \gamma^0_{jq}\, \gamma^q_{0i}. \tag{4.16}$$

Применив формулы (4.10), (4.6), (4.2), (4.7) и (4.11) к (4.16), мы сведём формулу (4.16) к виду

$$\begin{gathered} r^0_{i0j} = g_{00}^{-1}\, \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\, g_{00}^{-1}\, \nabla_{ij}\, g_{00} - \frac{1}{2}\, g_{00}^{-2}\, \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\, b_{ij} + \\ + \frac{1}{4}\, g_{00}^{-2}\, \nabla_i\, g_{00}\, \nabla_j\, g_{00} - \sum_{q=1}^{3} g_{00}^{-1}\, b_{jq}\, b^q_i \ \text{ для } \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Применив (4.13) и (4.17) к (3.6), мы выводим формулу для части компонент четырёхмерного тензора Риччи:

$$\begin{aligned}r_{ij} &= g_{00}^{-1}\,\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,\nabla_{ij}\,g_{00} - \frac{1}{2}\,g_{00}^{-2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\,b_{ij} + \\ &+ \frac{1}{4}\,g_{00}^{-2}\,\nabla_i\,g_{00}\,\nabla_j\,g_{00} + R_{ij} + g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3} b_k^k\,b_{ij} - \\ &- g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}(b_{ki}\,b_j^k + b_{kj}\,b_i^k) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь ∇ — знак ковариантной производной относительно трёхмерной метрической связности с компонентами (4.1).

Следующий шаг — это случай $i = 0$ и $1 \leqslant j, k \leqslant 3$. в (4.12). В этом случае мы имеем

$$\begin{aligned}r_{0kj}^{k} &= \frac{\partial b_j^k}{\partial x^k} - \frac{\partial b_k^k}{\partial x^j} + \sum_{q=1}^{3}\Gamma_{kq}^{k}\,b_j^q - \sum_{q=1}^{3}\Gamma_{jq}^{k}\,b_k^q + \\ &+ \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,b_k^k\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,b_j^k\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Мы добавим два слагаемых к формуле (4.19) и поменяем порядок следования слагаемых в ней:

$$\begin{aligned}r_{0kj}^{k} &= \frac{\partial b_j^k}{\partial x^k} + \sum_{q=1}^{3}\Gamma_{kq}^{k}\,b_j^q - \sum_{q=1}^{3}\Gamma_{kj}^{q}\,b_q^k + \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,b_k^k\,\nabla_j\,g_{00} - \\ &- \frac{\partial b_k^k}{\partial x^j} - \sum_{q=1}^{3}\Gamma_{jq}^{k}\,b_k^q + \sum_{q=1}^{3}\Gamma_{jk}^{q}\,b_q^k - \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,b_j^k\,\nabla_k\,g_{00}.\end{aligned}$$

Из-за $\Gamma_{kj}^{q} = \Gamma_{jk}^{q}$ добавленные слагаемые сокращаются. Но они позволяют заменить частные производные ковариантными:

$$\begin{aligned}r_{0kj}^{k} &= \nabla_k\,b_j^k - \nabla_j\,b_k^k + \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,b_k^k\,\nabla_j\,g_{00} - \\ &- \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,b_j^k\,\nabla_k\,g_{00} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k, j \leqslant 3.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Далее мы рассмотрим случай $i=k=0$ и $1\leqslant j\leqslant 3$ в (4.12). В этом случае получается зануление

$$r^0_{00j}=0\quad\text{для}\quad 1\leqslant j\leqslant 3.\tag{4.21}$$

Применив (4.20) и (4.21) к (3.6), получаем

$$\begin{gathered}r_{0j}=\sum_{k=1}^{3}\nabla_k\,b^k_j-\sum_{k=1}^{3}\nabla_j\,b^k_k+\\+\frac{1}{2}\,g^{-1}_{00}\sum_{k=1}^{3}\Bigl(b^k_k\,\nabla_j\,g_{00}-b^k_j\,\nabla_k\,g_{00}\Bigr).\end{gathered}\tag{4.22}$$

В силу симметрии тензора Риччи $r_{ij}=r_{j\,i}$ из (4.22) выводим

$$\begin{gathered}r_{i0}=\sum_{k=1}^{3}\nabla_k\,b^k_i-\sum_{k=1}^{3}\nabla_i\,b^k_k+\\+\frac{1}{2}\,g^{-1}_{00}\sum_{k=1}^{3}\Bigl(b^k_k\,\nabla_i\,g_{00}-b^k_i\,\nabla_k\,g_{00}\Bigr).\end{gathered}\tag{4.23}$$

Следующий шаг состоит в том чтобы посчитать компоненту r_{00} четырёхмерного тензора Риччи. Выберем $i=0$, $j=0$ и $1\leqslant k\leqslant 3$ в (4.12). В результате такого выбора получим

$$\begin{gathered}r^k_{0k0}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}g^{ks}\,\nabla_{ks}\,g_{00}-\frac{g^{-1}_{00}}{4}\sum_{s=1}^{3}g^{ks}\,\nabla_k\,g_{00}\,\cdot\\\cdot\,\nabla_s\,g_{00}+\frac{1}{2}\,g^{-1}_{00}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\,b^k_k-\frac{\partial b^k_k}{\partial x^0}-\sum_{q=1}^{3}b^k_q\,b^q_k.\end{gathered}\tag{4.24}$$

И последний случай — это $i=0$, $j=0$, $k=0$ в (4.12). Он даёт

$$r^0_{000}=0.\tag{4.25}$$

Применив соотношения (4.24) и (4.25) к (3.6), получаем

$$
\begin{aligned}
r_{00} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} g^{ks}\,\nabla_{ks}\,g_{00} - \frac{g_{00}^{-1}}{4}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} g^{ks}\,\nabla_{k}\,g_{00}\,\cdot\\
\cdot\,\nabla_{s}\,g_{00} + \frac{1}{2}\,g_{00}^{-1}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\sum_{k=1}^{3} b^k_k - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial b^k_k}{\partial x^0} - \sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b^k_q\,b^q_k.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Формулы (4.18), (4.22), (4.23) и (4.26) осуществляют искомую редукцию четырёхмерного тензора Риччи на 3D-браны. Они выражают его компоненты (3.6) в специальных координатах (2.2) через компоненты трёхмерного тензора Риччи (4.15), через скалярную функцию g_{00} и через компоненты тензорного поля $\mathbf{b}$, определяемого формулой (4.8). Компоненты трёхмерной евклидовой метрики (2.7) в этих выражениях также присутствуют.

§ 5. Редукция скалярной кривизны на 3D-браны.

Четырёхмерная скалярная кривизна задаётся формулой (3.7). С учётом (2.6) эту формулу можно переписать так:

$$
r = r_{00}\,g_{00}^{-1} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} r_{ij}\,g^{ij}.
\tag{5.1}
$$

Применяя (4.18) и (4.26) к (5.1) и учитывая (4.8), получаем

$$
\begin{aligned}
r = g_{00}^{-2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\sum_{k=1}^{3} b^k_k + g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_{kq}\,g_{00}\,-\\
-\,\frac{g_{00}^{-2}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_{k}\,g_{00}\,\nabla_{q}\,g_{00} - 2\,g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial b^k_k}{\partial x^0}\,-\\
-\,R - g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b^k_q\,b^q_k - g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b^k_k\,b^q_q.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Величина R в (5.2) — это трёхмерная скалярная кривизна. Она определяется следующей формулой:

$$R = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\, g^{ij}. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) является аналогом формулы (3.6) для четырёхмерной скалярной кривизны. А полученная выше формула (5.2) реализует искомую редукцию четырёхмерной скалярной кривизны на 3D-браны.

§ 6. Редукция уравнений Эйнштейна на 3D-браны.

В правой части уравнений Эйнштейна (3.1) мы видим компоненты тензора энергии-импульса. Однако никаких формул для этих компонент у нас нет, поскольку мы не рассматриваем никаких конкретных видов материи во вселенной. Поэтому для редукции компонент тензора энергии-импульса на 3D-браны достаточно считать их записанными в специальных координатах (2.2)

Теперь мы готовы выполнить редукцию уравнений Эйнштейна (3.1) на 3D-браны. В результате такой редукции уравнения Эйнштейна разделяются на три группы. Самой многочисленной является первая группа уравнений. Она содержит шесть уравнений, пронумерованных двумя индексами $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Вторая группа уравнений содержит три уравнения, пронумерованных индексом $1 \leqslant i \leqslant 3$. Третья группа уравнений содержит всего одно уравнение. Запишем сначала вторую группу редуцированных уравнений Эйнштейна:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{3} \nabla_k\, b^k_i - \sum_{k=1}^{3} \nabla_i\, b^k_k + \frac{1}{2}\, g^{-1}_{00} \sum_{k=1}^{3} b^k_k\, \nabla_i\, g_{00} - \\
- \frac{1}{2}\, g^{-1}_{00} \sum_{k=1}^{3} b^k_i\, \nabla_k\, g_{00} = \frac{8\,\pi\,\gamma}{c^4_{\text{gr}}}\, T_{i\,0},
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Далее запишем уравнения их первой самой многочисленной группы редуцированных уравнений Эйнштейна:

$$\frac{g_{00}^{-2}}{2}\left(g_{ij}\sum_{k=1}^{3} b_k^k - b_{ij}\right)\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{g_{00}^{-1}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\Big(g^{kq}\,g_{ij} -$$
$$- \delta_i^k\,\delta_j^q\Big)\nabla_{kq}\,g_{00} - \frac{g_{00}^{-2}}{4}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\Big(g^{kq}\,g_{ij} - \delta_i^k\,\delta_j^q\Big)\cdot$$
$$\cdot\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00} + g_{00}^{-1}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^0} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial b_k^k}{\partial x^0}\,g_{ij} - \sum_{k=1}^{3}(b_{ki}\,\cdot\right. \tag{6.2}$$
$$\cdot\, b_j^k + b_{kj}\,b_i^k) - \frac{g_{ij}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b_q^k\,b_k^q - \frac{g_{ij}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b_k^k\,b_q^q +$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{3} b_k^k\,b_{ij}\right) + R_{ij} - \frac{R}{2}\,g_{ij} + \Lambda\,g_{ij} = \frac{8\,\pi\,\gamma}{c_{\rm gr}^4}\,T_{ij},$$

И в последнюю очередь запишем единственное уравнение из третьей группы редуцированных уравнений Эйнштейна:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}(b_k^k\,b_q^q - b_q^k\,b_k^q) + \frac{R}{2}\,g_{00} - \Lambda\,g_{00} = \frac{8\,\pi\,\gamma}{c_{\rm gr}^4}\,T_{00}. \tag{6.3}$$

Уравнения (6.2) выводятся с использованием (4.18) и (5.2). Уравнение (6.3) выводятся с использованием (4.26) и (5.2). Уравнения (6.1) выводятся с использованием (4.23).

§ 7. Уравнения гравитационного поля в новой теории.

Число различных уравнений Эйнштейна в результате их редукции на 3D-браны не меняется. Их 10, из них шесть в уравнениях (6.2), три в уравнениях (6.1) и одно уравнение в (6.3). А число динамических переменных, описывающих гравитационное поле, в новой теории равно семи. Поэтому из новой теории исключаются три уравнения. Это уравнения (6.1). Уравнения (6.2) и (6.3) остаются и составляют систему уравнений гравитационного поля в новой теории. Выбор именно этих уравнений будет оправдан в главе III.

§ 8. Чёрные дыры Шварцшильда в новой теории.

Чёрные дыры Шварцшильда задаются метрикой Шварцшильда. Эта метрика является решением уравнений Эйнштейна (3.1) с нулевой правой частью и с выбором $\Lambda = 0$ в них. В нашей теории мы не заменяем уравнения Эйнштейна (3.1) другими. Мы лишь преобразуем их в специальные координаты (2.2), связанные с расслоением 3D-бран, и исключаем из теории часть из них. Поэтому все решения уравнений Эйнштейна (3.1) остаются решениями уравнений гравитационного поля (6.2) и (6.3) в новой теории после преобразования их в специальные координаты (2.2).

Метрика Шварцшильда диагональна в тех координатах, в которых она традиционно записывается. Её диагональные компоненты определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1 - \frac{r_{\text{gr}}}{\rho}, && g_{11} = \frac{-1}{1 - \dfrac{r_{\text{gr}}}{\rho}}, \\ &g_{22} = -\rho^2, && g_{33} = -\rho^2\,\sin^2(\theta). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Диагональность метрики (8.1) согласуется с блочной диагональностью матрицы (2.6). Константа r_{gr} в (8.1) называется гравитационным радиусом чёрной дыры Шварцшильда.

Переменные ρ и θ можно считать сферическими сопутствующими координатами на бранах, дополнив их ещё одной сопутствующей координатой ϕ. Их можно дополнить мембранным временем t. При таком понимании присутствующих и отсутствующих в (8.1) переменных 3D-браны будут задаваться уравнениями $t = \text{const}$, а координаты

$$x^0 = c_{\text{gr}}\, t, \qquad x^1 = \rho, \qquad x^2 = \theta, \qquad x^3 = \phi. \tag{8.2}$$

будут аналогами координат (2.2).

Метрика Шварцшильда является стационарной, её компоненты (8.1) не зависят от мембранного времени t в (8.2). Поэтому из формулы (4.8) мы выводим

$$b_{ij} = 0. \tag{8.3}$$

Прямыми вычислениями можно показать, что четырёхмерный тензор Риччи для метрики Шварцшильда (8.1) тождественным образом равен нулю:

$$r_{ij} = 0. \tag{8.4}$$

Это же верно и для четырёхмерной скалярной кривизны:

$$r = 0. \tag{8.5}$$

Формула (8.4) выводится при помощи формул (3.4), (3.5) и (3.6). Далее формула (8.5) выводится при помощи (3.7). Из (8.4) и (8.5) следует, что метрика Шварцшильда (8.1) является решением уравнений Эйнштейна (3.1) с нулевой правой частью и с выбором $\Lambda = 0$ в них.

В трёхмерной парадигме новой теории метрика Шварцшильда (8.1) разделяется на трёхмерную метрику

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \dfrac{r_{\text{gr}}}{\rho}}, \qquad g_{22} = \rho^2, \qquad g_{33} = \rho^2 \sin^2(\theta) \tag{8.6}$$

и на отдельную скалярную функцию

$$g_{00} = 1 - \frac{r_{\text{gr}}}{\rho}. \tag{8.7}$$

Метрика (8.6) определяет компоненты метрической связности в соответствии с формулой (4.1):

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{r_{\text{gr}}}{2\,\rho\,(r_{\text{gr}} - \rho)}, && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho},\\
&\Gamma^1_{22} = r_{\text{gr}} - \rho, && \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta,\\
&\Gamma^1_{33} = (r_{\text{gr}} - \rho)\,\sin^2\theta, && \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{\rho},\\
&\Gamma^2_{33} = -\frac{\sin(2\,\theta)}{2}, && \Gamma^3_{32} = \operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

Используя компоненты связности (8.8), при помощи формул (4.14) и (4.15) мы можем вычислить компоненты трёхмерного тензора Риччи для метрики (8.6). Они составляют диагональную 3×3 матрицу с элементами

$$
R_{11} = \frac{r_{\text{gr}}}{\rho^2\,(r_{\text{gr}} - \rho)}\,, \quad R_{22} = \frac{r_{\text{gr}}}{2\,\rho}\,, \quad R_{33} = \frac{r_{\text{gr}}\,\sin^2\theta}{2\,\rho}
\tag{8.9}
$$

на диагонали. Из (8.9), вычислив скалярную кривизну по формуле (5.3), находим, что она равна нулю:

$$
R = 0.
\tag{8.10}
$$

В уравнениях (6.2) присутствует градиент скалярной функции (8.7). Его компоненты легко вычисляются:

$$
\nabla_1\,g_{00} = \frac{r_{\text{gr}}}{\rho^2}\,, \qquad \nabla_2\,g_{00} = 0, \qquad \nabla_3\,g_{00} = 0.
\tag{8.11}
$$

Помимо градиента (8.11) в уравнениях (6.2) присутствует двойной градиент $\nabla_{ij}\,g_{00}$ скалярной функции (8.7):

$$
\nabla_{ij}\,g_{00} = \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \sum_{k=1}^{3}\Gamma^k_{ij}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}.
\tag{8.12}
$$

Компоненты двойного градиента (8.12) тоже легко вычисляются. Они составляют диагональную 3×3 матрицу со следующими элементами на диагонали:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{11}\, g_{00} &= \frac{(4\,\rho - 3\,r_{\text{gr}})}{2\,(r_{\text{gr}} - \rho)\,\rho^3},\\
\nabla_{22}\, g_{00} &= \frac{r_{\text{gr}}\,(r_{\text{gr}} - \rho)}{\rho^2},\\
\nabla_{33}\, g_{00} &= \frac{r_{\text{gr}}\,(r_{\text{gr}} - \rho)\,\sin^2\theta}{\rho^2}.
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

Слагаемые с компонентами градиента (8.11) и с компонентами двойного градиента (8.13) в уравнениях (6.2) имеют вид

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{g_{00}^{-2}}{4}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\Bigl(g^{kq}\,g_{ij} - \delta^k_i\,\delta^q_j\Bigr)\,\nabla_k\, g_{00}\,\nabla_q\, g_{00},\\
B_{ij} &= \frac{g_{00}^{-1}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\Bigl(g^{kq}\,g_{ij} - \delta^k_i\,\delta^q_j\Bigr)\,\nabla_{kq}\, g_{00}.
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

Величины (8.14) — это компоненты двух диагональных матриц 3×3 с диагональными элементами

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= 0, & B_{11} &= \frac{r_{\text{gr}}}{(r_{\text{gr}} - \rho)\,\rho^2},\\
A_{22} &= \frac{r_{\text{gr}}\,(r_{\text{gr}} - \rho)}{\rho^2}, & B_{22} &= \frac{r_{\text{gr}}\,(3\,r_{\text{gr}} - 2\,\rho)}{4\,(r_{\text{gr}} - \rho)\,\rho},\\
A_{33} &= \frac{r_{\text{gr}}\,(r_{\text{gr}} - \rho)\,\sin^2\theta}{\rho^2}, & B_{33} &= \frac{r_{\text{gr}}\,(3\,r_{\text{gr}} - 2\,\rho)\,\sin^2\theta}{4\,(r_{\text{gr}} - \rho)\,\rho}.
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

Теперь мы готовы проверить выполнение уравнений (6.1), (6.2) и (6.3) для метрики (8.6) и функции (8.7). В силу (8.3) все компоненты тензорного поля $\mathbf{b}$ в (6.1), (6.2) и (6.3) зануляются. Отсюда немедленно следует, что уравнения (6.1) оказываются выполненными при условии $T_{i0} = 0$. Далее в силу (8.10) и (8.3) мы заключаем, что уравнение (6.3) оказывается выполненным при выполнении условия $T_{00} = 0$ и дополнительном предположении $\Lambda = 0$. Переходим к уравнениям (6.2). В силу полученных выше соотношений (8.3), (8.10) и (8.14) уравнения (6.2) приводятся к виду

$$B_{ij} - A_{ij} + R_{ij} + \Lambda\, G_{ij} = \frac{8\,\pi\,\gamma}{c_{\mathrm{gr}}^4}\, T_{ij}. \tag{8.16}$$

Применив (8.15) и (8.9) к (8.16), мы заключаем, что уравнения (6.2) оказываются выполненными при условии $T_{ij} = 0$ и в предположении, что $\Lambda = 0$. Полученный результат формулируется в виде теоремы.

Теорема 8.1. *Трёхмерная метрика Шварцшильда* (8.6) *и скалярная функция* (8.7) *удовлетворяют уравнениям гравитационного поля* (6.2), (6.3) *и* (6.1) *с нулевой правой частью, то есть в отсутствии материи, в рамках космологии с нулевой космологической константой* $\Lambda = 0$.

§ 9. Координатная ковариантность уравнений гравитации.

Координатной ковариантностью уравнений геометрической природы обычно называют сохранение формы этих уравнений при замене одних координат другими и одновременной замене входящих в них функций другими по определённым правилам. Типичным примером координатно ковариантных уравнений являются дифференциальные уравнения на компоненты тензорных полей, записанные с использованием операций тензорного умножения, свёртки и ковариантного дифференцирования (см. [53]). Уравнения гравитационного поля (6.1), (6.2) и (6.3) относятся именно к такому классу координатно ковариантных уравнений. Они проявляют свойство координатной ковариантности относительно замен одних сопутствующих координат другими (см. (3.3) в первой главе).

§ 10. Ковариантность уравнений гравитации относительно преобразований масштабирования мембранного времени.

Преобразования масштабирования мембранного времени задаются формулами (5.1) в первой главе. С учётом (2.2) их можно изобразить следующим образом:

$$\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0), \qquad\qquad x^0 = x^0(\tilde{x}^0). \tag{10.1}$$

Преобразования (10.1) не затрагивают пространственных сопутствующих координат в (2.2). Поэтому мы можем записать

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0), \\ \tilde{x}^1 = x^1, \\ \tilde{x}^2 = x^2, \\ \tilde{x}^3 = x^3, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x^0 = x^0(\tilde{x}^0), \\ x^1 = \tilde{x}^1, \\ x^2 = \tilde{x}^2, \\ x^3 = \tilde{x}^3. \end{cases} \tag{10.2}$$

Четырёхмерная метрика (2.6) подчиняется стандартному закону преобразования компонент тензорного поля валентности $(0, 2)$ при преобразованиях (10.2):

$$G_{ij} = \sum_{k=0}^{3} \sum_{q=0}^{3} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \, \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j} \, \tilde{G}_{kq}, \tag{10.3}$$

Этому же закону подчиняются компоненты тензора энергии-импульса в правых частях уравнений (6.1), (6.2) и (6.3):

$$T_{ij} = \sum_{k=0}^{3} \sum_{q=0}^{3} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \, \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j} \, \tilde{T}_{kq}. \tag{10.4}$$

В силу специального вида преобразований (10.2) формулы (10.3) сохраняют блочно-диагональный вид матрицы (2.6).

Эти формулы можно разделить на пространственную и временную части. Пространственная часть имеет вид

$$g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}^0(x^0), x^1, x^2, x^3), \tag{10.5}$$

где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Временная часть имеет вид

$$g_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\tilde{x}^0(x^0)')^2\, \tilde{g}_{00}(\tilde{x}^0(x^0), x^1, x^2, x^3). \tag{10.6}$$

Обозначим через ξ производную функции $\tilde{x}^0(x^0)$ в (10.1). Тогда формулы (10.5) и (10.6) можно переписать так:

$$g_{00} = \xi^2\, \tilde{g}_{00}, \qquad\qquad g_{ij} = \tilde{g}_{ij}. \tag{10.7}$$

В отличие от (10.3) формула (10.4) разбивается не на две, а на три части. Две из них имеют вид

$$T_{00} = \xi^2\, \tilde{T}_{00}, \qquad\qquad T_{ij} = \tilde{T}_{ij} \ \text{ для } \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{10.8}$$

Третья часть формулы (10.4) записывается так:

$$T_{i0} = \xi\, \tilde{T}_{i0} \ \text{ и } \ T_{0i} = \xi\, \tilde{T}_{0i} \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 3. \tag{10.9}$$

Преобразования (10.7), (10.8) и (10.9) могут быть распространены на все слагаемые в уравнениях гравитации (6.1), (6.2) и (6.3). Из (10.7) мы выводим

$$g^{ij} = \tilde{g}^{ij}. \tag{10.10}$$

Затем, применив (10.7) и (10.10) к (4.8), мы получаем

$$b_{ij} = \xi\, \tilde{b}_{ij}, \qquad\qquad b^k_q = \xi\, \tilde{b}^k_q. \tag{10.11}$$

Дифференцируя первое соотношение (10.7) по x^0, мы находим

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \xi^3\, \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial \tilde{x}^0} + 2\, \xi\, \xi'\, \tilde{g}_{00}. \tag{10.12}$$

Аналогичным образом, дифференцируя соотношения (10.11) по переменной x^0, мы выводим

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^0}=\xi^2\,\frac{\partial\tilde{b}_{ij}}{\partial\tilde{x}^0}+\xi'\,\tilde{b}_{ij},\qquad\frac{\partial b_q^k}{\partial x^0}=\xi^2\,\frac{\partial\tilde{b}_q^k}{\partial\tilde{x}^0}+\xi'\,\tilde{b}_q^k.\tag{10.13}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы применить второе соотношение (10.7), соотношения (10.2) и соотношение (10.10) к (4.1). В результате этого мы получим правило преобразования компонент трёхмерной связности:

$$\Gamma^k_{ij}=\tilde{\Gamma}^k_{ij}.\tag{10.14}$$

Правило преобразования (10.14) вместе с (10.2) дают

$$\nabla_i\,g_{00}=\xi^2\,\nabla_i\,\tilde{g}_{00},\qquad\nabla_{ij}\,g_{00}=\xi^2\,\nabla_{ij}\,\tilde{g}_{00}.\tag{10.15}$$

Аналогичным образом, применив (10.14) и (10.2) к (10.11), получаем следующие формулы:

$$\nabla_i b_{kq}=\xi\,\nabla_i\tilde{b}_{ij},\qquad\nabla_i b_q^k=\xi\,\nabla_i\tilde{b}_q^k.\tag{10.16}$$

Преобразования (10.2), (10.7), (10.10) и (10.14), применённые к соотношениям (4.14), (4.15) и (5.3), дают

$$R_{ij}=\tilde{R}_{ij},\qquad R=\tilde{R}.\tag{10.17}$$

Теорема 10.1. *Уравнения гравитации* (6.1), (6.2) *и* (6.3) *ковариантны по отношению к преобразованиям* (10.2), (10.7), (10.8), (10.9), (10.10), (10.11), (10.12), (10.13), (10.14), (10.15), (10.16) *и* (10.17), *которые индуцированы масштабированием мембранного времени* (10.1).

Доказательство теоремы 10.1 состоит в прямых вычислениях с использованием перечисленных в теореме формул.

ГЛАВА III

ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ.

§ 1. Действие для гравитационного поля.

Для сохранения преемственности между теорией относительности Эйнштейна и новой теорией, которая рассматривается в этой книге, мы сохранили понятие пространства-времени, хотя и лишили его статуса четырёхмерного физического континуума (см. § 2 в первой главе). Действие гравитационного поля в общей теории относительности даётся четырёхмерным интегралом

$$S_{\text{gr}}=-\frac{c_{\text{gr}}^3}{16\,\pi\,\gamma}\int(r+2\,\Lambda)\,\sqrt{-\det G}\;d^4x,\tag{1.1}$$

см. [3]. Мы используем действие (1.1), переписав его в трёхмерном виде в терминах сопутствующих координат и мембранного времени (см. § 3 и § 5 в первой главе), как это было сделано в [29]. В силу (2.6) из второй главы получаем

$$\sqrt{-\det G}=\sqrt{g_{00}}\,\sqrt{\det g}\,.\tag{1.2}$$

Подстановка (1.2) в формулу (1.1) даёт

$$S_{\text{gr}}=-\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\iint(r+2\,\Lambda)\,\sqrt{\det g}\,\sqrt{g_{00}}\;d^3x\,dt.\tag{1.3}$$

Для четырёхмерной скалярной кривизны r во второй главе была выведена формула (5.2). С учётом формул (2.2) из второй главы эта формула переписывается так:

$$\begin{gathered} r = g_{00}^{-2}\,\frac{\dot g_{00}}{c_{\text{gr}}}\sum_{k=1}^{3} b^k_k + g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_{kq}\,g_{00} - \\ -\,\frac{g_{00}^{-2}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00} - 2\,g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot b^k_k}{c_{\text{gr}}} - \\ -\,R - g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b^k_q\,b^q_k - g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b^k_k\,b^q_q. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Традиционно интегралы действия физических теорий содержат динамические переменные этих теорий и их первые производные по времени. В формуле (1.4) мы видим слагаемое с $\dot b^k_k$. Применяя формулы (4.8) и (2.2) из второй главы, получаем следующую формулу:

$$\dot b_{ij} = \frac{1}{2\,c_{\text{gr}}}\,\ddot g_{ij}. \tag{1.5}$$

В силу (1.5) слагаемое с $\dot b^k_k$ содержит вторые производные от динамических переменных по времени. Такое слагаемое надо исключить из интеграла действия для гравитационного поля (1.3). Это было сделано в работе [29].

§ 2. Редукция интеграла действия.

Выберем первое и четвёртое слагаемые в правой части формулы (1.4). При их подстановке в интеграл (1.3) мы получим следующий интеграл по времени:

$$I = \int\limits_{v}^{u}\left(g_{00}^{-2}\,\frac{\dot g_{00}}{c_{\text{gr}}}\sum_{k=1}^{3} b^k_k - 2\,g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot b^k_k}{c_{\text{gr}}}\right)\sqrt{\det g}\,\sqrt{g_{00}}\,dt. \tag{2.1}$$

Интеграл (2.1) можно преобразовать к виду

$$I=\int\limits_{v}^{u}\left(g_{00}^{-3/2}\,\frac{\dot g_{00}}{c_{\text{gr}}}\sum_{k=1}^{3}b_k^k-2\,g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot b_k^k}{c_{\text{gr}}}\right)\sqrt{\det g}\;dt. \tag{2.2}$$

Дальнейшее преобразование интеграла (2.2) с применением интегрирования по частям даёт

$$\begin{gathered}I=\int\limits_{v}^{u}\frac{\partial}{\partial t}\left(-2\,g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k^k}{c_{\text{gr}}}\right)\sqrt{\det g}\;dt=-2\,g_{00}^{-1/2}\,\cdot\\ \cdot\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k^k}{c_{\text{gr}}}\,\sqrt{\det g}\,\Biggr|_{v}^{u}+\int\limits_{v}^{u}2\,g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k^k}{c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial(\sqrt{\det g}\,)}{\partial t}\,dt.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Неинтегральный член в формуле (2.3) можно опустить, поскольку такие члены не влияют на дифференциальные уравнения, выводимые из интегралов действия. Интегральный член в формуле (2.3) можно преобразовать при помощи формулы Якоби для дифференцирования детерминанта (см. [54]):

$$\frac{\partial(\sqrt{\det g}\,)}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\frac{\partial g_{kq}}{\partial t}\,\sqrt{\det g}\,. \tag{2.4}$$

Применив формулу (2.4) и формулы (4.8) и (2.2) из второй главы к интегралу (2.3), получаем

$$\begin{gathered}I=-2\,g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\frac{b_k^k}{c_{\text{gr}}}\,\sqrt{\det g}\,\Biggr|_{v}^{u}+\\ +\int\limits_{v}^{u}2\,g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_k^k\,b_q^q\,\sqrt{\det g}\;dt.\end{gathered} \tag{2.5}$$

В силу (2.5) интеграл действия (1.3) преобразуется к виду

$$S_{\text{gr}} = -\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\iint(\rho + 2\,\Lambda)\,\sqrt{\det g}\,\sqrt{g_{00}}\;d^3x\,dt, \tag{2.6}$$

где скалярная функция ρ даётся формулой

$$\begin{gathered}\rho = g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_{kq}\,g_{00} - \frac{g_{00}^{-2}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\cdot\\ \cdot\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00} - R - g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b_q^k\,b_k^q + \\ + g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b_k^k\,b_q^q.\end{gathered}\tag{2.7}$$

В отличие от исходного интеграла действия (1.3), интеграл действия (2.6) содержит лишь производные первого порядка от динамических переменных g_{ij} и g_{00}.

§ 3. Лагранжиан гравитационного поля и лагранжиан материи.

Известно, что интегралы действия в полевых теориях — это интегралы по времени от лагранжианов, а лагранжианы — это интегралы от плотностей лагранжианов по пространственным переменным. Поэтому мы запишем (2.6) как

$$S_{\text{gr}} = \int L_{\text{gr}}\,dt, \qquad\qquad L_{\text{gr}} = \int \mathcal{L}_{\text{gr}}\,\sqrt{\det g}\;d^3x. \tag{3.1}$$

Материя имеет свой собственный интеграл действия и свой собственный лагранжиан. Их мы запишем так:

$$S_{\text{mat}} = \int L_{\text{mat}}\,dt, \qquad L_{\text{mat}} = \int \mathcal{L}_{\text{mat}}\,\sqrt{\det g}\;d^3x. \tag{3.2}$$

Плотность лагранжиана в (3.1) даётся формулой

$$\mathcal{L}_{\mathrm{gr}} = -\frac{c_{\mathrm{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\,\sqrt{g_{00}}\,(\rho + 2\,\Lambda), \tag{3.3}$$

где ρ берётся из (2.7). Квадратный корень из g_{00} унаследован от четырёхмерного действия. Поэтому здесь в трёхмерном подходе мы не включаем его в (3.1) и относим к плотности лагранжиана (3.3).

В силу формулы (2.7) плотность лагранжиана (3.3) зависит от g_{00} и от g_{ij} и от производных по времени этих динамических переменных. Производные по времени от g_{ij} заменяются на b_{ij} в силу формул (4.8) и (2.2) из второй главы. Поэтому

$$L_{\mathrm{gr}} = L_{\mathrm{gr}}(g, \dot{g}, \mathbf{g}, \mathbf{b}). \tag{3.4}$$

Здесь g и $\dot{g}$ изображают g_{00} и $\dot{g}_{00}$, а $\mathbf{g}$ and $\mathbf{b}$ изображают g_{ij} и b_{ij}. Плотность лагранжиана материи может зависеть от некоторых дополнительных динамических переменных, описывающих состояние материи. Мы обозначим эти динамические переменные через $Q_1, \ldots, Q_n$, а их производные по времени обозначим через $\dot{Q}_1, \ldots, \dot{Q}_n$:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \tag{3.5}$$

Соотношения (3.5) аналогичны соотношениям (4.8) из второй главы. На их основе мы запишем

$$L_{\mathrm{mat}} = L_{\mathrm{mat}}(g, \dot{g}, \mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}). \tag{3.6}$$

Каждый аргумент в списке аргументов L_{gr} и L_{mat} в (3.4) и (3.6) изображает не только соответствующие группы динамических переменных, но и некоторое конечное количество их производных различных порядков по пространственным переменным x^1, x^2, x^3.

Полный интеграл действия гравитационного поля и материи есть сумма интегралов (3.1) и (3.2):

$$S=\int L\,dt,\qquad\qquad L=\int\mathcal{L}\,\sqrt{\det g}\,d^3x,\tag{3.7}$$

где

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\text{gr}}+\mathcal{L}_{\text{mat}}.\tag{3.8}$$

Следующий шаг в развитии теории состоит в применении принципа наименьшего действия[1] (см. [55]) к интегралу действия S в формулах (3.7). Применив этот принцип формально, мы получаем три группы дифференциальных уравнений. Первая группа уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2\,c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial}{\partial t}\biggl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\biggr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}-\frac{1}{2}\,\biggl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\biggr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3}b^q_q+\\ +\biggl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{ij}}\biggr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}=0,\ \text{ где }\ 1\leqslant i,j\leqslant 3.\end{gathered}\tag{3.9}$$

Эта группа уравнений ассоциирована с динамическими переменными g_{ij} и b_{ij}. Вторая группа уравнений ассоциирована с динамическими переменными g_{00} и $\dot{g}_{00}$:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial}{\partial t}\biggl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{g}_{00}}\biggr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}-c_{\text{gr}}\,\biggl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{g}_{00}}\biggr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3}b^q_q+\\ +\biggl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{00}}\biggr)_{\substack{\dot{g},\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}=0.\end{gathered}\tag{3.10}$$

Эта группа уравнений состоит из одного единственного уравнения (3.10). Третья группа уравнений связана с материей. Она ассоциирована с динамическими переменными

[1] Принцип наименьшего действия правильнее было бы называть принципом стационарного действия, поскольку минимальность действия по факту никогда не требуется.

$Q_1, \ldots, Q_n$ и $\dot{Q}_1, \ldots, \dot{Q}_n$ и описывает динамику этих переменных по времени:

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{Q}_i}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{b},Q}} - c_{\text{gr}}\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{Q}_i}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}}\sum_{q=1}^{3} b^q_q\,+\\
+\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta Q_i}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\dot{\mathbf{Q}}}} = 0, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.
\end{gathered}\tag{3.11}$$

Уравнения (3.9) и (3.10) описывают эволюцию гравитационного поля, а уравнения (3.11) описывают эволюцию материи.

Ниже мы не будем преобразовывать уравнения (3.11) поскольку в данной книге переменные $Q_1, \ldots, Q_n$ не конкретизируются и нет конкретных формул для плотности лагранжиана материи $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ в (3.2) и (3.8). Что же касается уравнений (3.9) и (3.10), то мы их будем преобразовывать. Обозначим

$$\begin{gathered}
\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{ij}} = -\,\frac{1}{2\,c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} -\\
-\,\frac{1}{2}\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3} b^q_q + \Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}},
\end{gathered}\tag{3.12}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{ij}} = -\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{kq}}\,g_{ki}\,g_{qj}.\tag{3.13}$$

Помимо (3.12) и (3.13) рассмотрим следующие формулы:

$$\begin{gathered}
\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{00}} = -\,\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta\dot{g}_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} -\\
-\,c_{\text{gr}}\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta\dot{g}_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3} b^q_q + \Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{00}}\Bigr)_{\substack{\dot{g},\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}},
\end{gathered}\tag{3.14}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g^{00}} = -\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{00}}\,g_{00}^{2}.\tag{3.15}$$

Используя (3.7) и применяя (3.12) к (3.9), мы выводим

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{2\,c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathrm{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}-\frac{1}{2}\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathrm{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3}b^q_q\,+\\
+\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}=-\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{ij}}.
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

Аналогичным образом, используя (3.7) и применяя (3.14) к уравнению (3.10), выводим

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta \dot{g}_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathrm{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}-c_{\text{gr}}\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta \dot{g}_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathrm{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3}b^q_q\,+\\
+\,\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{00}}\Bigr)_{\substack{\dot{g},\mathrm{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}=-\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{00}}.
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

Теперь остаётся лишь вывести явные выражения для левых частей в уравнениях (3.16) и (3.17). Для этого используем формулы (3.1), (3.3) и (2.7).

§ 4. Уравнения для трёхмерной метрики.

В неявной форме необходимые нам дифференциальные уравнения для трёхмерной метрики g_{ij} записаны в виде уравнений Эйлера-Лагранжа (3.16). Чтобы сделать их явными, надо вычислить частные вариационные производные в левой части уравнений (3.16). Внесём малые вариации в динамические переменные b_{ij} по следующей формуле:

$$
\hat{b}_{ij}=b_{ij}(t,x^1,x^2,x^3)+\varepsilon\,h_{ij}(t,x^1,x^2,x^3).
\tag{4.1}
$$

Здесь $\varepsilon\to 0$ — это малый параметр, а $h_{ij}(t,x^1,x^2,x^3)$ — произвольные гладкие функции с компактным носителем (см.

[56]). В этом случае частные вариационные производные плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ по b_{ij} определяются формулой

$$\hat{L}_{\text{gr}} = L_{\text{gr}} + \varepsilon \int \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathrm{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} \cdot \\ \cdot h_{ij} \sqrt{\det g}\, d^3x + \ldots , \tag{4.2}$$

где L_{gr} берётся из (3.1) и $\hat{L}_{\text{gr}}$ — это результат подстановки $\hat{b}_{ig}$ вместо b_{ij} в L_{gr}. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ в (4.2) задаётся формулой (3.3). Она зависит от b_{ij} только через последние два слагаемых в правой части формулы (2.7) для ρ. Аналогичные слагаемые имеются в формуле (2.6) из [18]. Поэтому мы можем применить формулу (6.3) из [18], слегка модифицировав её:

$$\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathrm{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} = \frac{c_{\text{gr}}^4\, g_{00}^{-1/2}}{8\,\pi\,\gamma}\Bigl(b^{ij} - \sum_{k=1}^{3} b^k_k\, g^{ij}\Bigr). \tag{4.3}$$

Теперь согласно (3.16) мы должны продифференцировать частную вариационную производную (4.3) по времени t:

$$-\frac{1}{2\,c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,\dot{g},\mathrm{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} = \frac{c_{\text{gr}}^3\, g_{00}^{-3/2}}{16\,\pi\,\gamma}\Bigl(\frac{b^{ij}}{2} - \sum_{k=1}^{3} b^k_k\,\frac{g^{ij}}{2}\Bigr)\cdot \\ \cdot\,\dot{g}_{00} - \frac{c_{\text{gr}}^4\, g_{00}^{-1/2}}{16\,\pi\,\gamma}\Bigl(\frac{1}{c_{\text{gr}}}\,\dot{b}^{ij} - \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{c_{\text{gr}}}\,\dot{b}^k_k\, g^{ij} + \sum_{k=1}^{3} 2\, b^k_k\, b^{ij}\Bigr). \tag{4.4}$$

При выводе (4.4) мы использовали формулу дифференцирования обратной матрицы:

$$\dot{g}^{ij} = -\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{ik}\,\dot{g}_{kq}\, g^{qj}. \tag{4.5}$$

Вместе с (4.5) при выводе (4.4) мы использовали формулы (4.8) и (2.2) из второй главы для вычисления $\dot{g}_{kq}$.

Второе слагаемое в левой части формулы (3.16) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\right)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\sum_{q=1}^{3} b_q^q =\\ = -\frac{c_{\text{gr}}^4\,g_{00}^{-1/2}}{16\,\pi\,\gamma}\left(\sum_{k=1}^{3} b_k^k\,b^{ij} - \sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} b_k^k\,b_q^q\,g^{ij}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Третье слагаемое в левой части формулы (3.16) содержит частную вариационную производную от $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ по g_{ij}. Чтобы вычислить эту частную вариационную производную мы вводим малую вариацию метрики:

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij}(t, x^1, x^2, x^3) + \varepsilon\,h_{ij}(t, x^1, x^2, x^3). \tag{4.7}$$

Несмотря на соотношения (4.8) и (2.2) из второй главы вариации (4.1) и (4.7) считаются независимыми. Здесь вновь $\varepsilon \to 0$ — это малый параметр и $h_{ij}(t, x^1, x^2, x^3)$ — произвольные гладкие функции с компактным носителем. Частная вариационная производная плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ по g_{ij} определяется формулой

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\text{gr}} = L_{\text{gr}} + \varepsilon\int\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{ij}}\right)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}\cdot\\ \cdot\,h_{ij}\,\sqrt{\det g}\;d^3x + \ldots. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Второй интеграл L_{gr} в (3.1) после подстановки в него (3.3) и после применения (2.7) разбивается на шесть интегралов:

$$L_{\text{gr}} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6. \tag{4.9}$$

Первый из этих интегралов имеет вид

$$L_1 = -\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,g_{00}^{-1/2}\,\nabla_{kq}\,g_{00}\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{4.10}$$

Второе слагаемое в правой части (4.9) похоже на (4.10):

$$L_2 = \frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3} g^{kq}\,\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{4.11}$$

Третье слагаемое в правой части формулы (4.9) содержит скалярную кривизну R:

$$L_3 = \frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int g_{00}^{1/2}\,R\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{4.12}$$

Четвёртое и пятое слагаемые в правой части формулы (4.9) похожи друг на друга:

$$L_4 = \frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{00}^{-1/2}\,b^k_q\,b^q_k\,\sqrt{\det g}\,d^3x, \tag{4.13}$$

$$L_5 = -\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{00}^{-1/2}\,b^k_k\,b^q_q\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{4.14}$$

Шестое слагаемое в правой части формулы (4.9) содержит космологическую константу:

$$L_6 = -\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int g_{00}^{1/2}\,2\,\Lambda\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{4.15}$$

Для получения явного выражения для частной вариационной производной в (4.8) надо подставить выражение (4.7) вместо

g_{ij} в каждый из интегралов (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) и после этого разложить каждый из них по малому параметру ε до слагаемых первого порядка.

В формуле (4.10) присутствует вторая ковариантная производная $\nabla_{kq}\, g_{00}$. Она вычисляется через компоненты Γ^s_{kq} метрической связности для метрики (2.7) из второй главы:

$$\nabla_{kq}\, g_{00} = \frac{g_{00}}{\partial x^k\, \partial x^q} - \sum_{s=1}^{3} \Gamma^s_{kq}\, \frac{g_{00}}{\partial x^s}. \tag{4.16}$$

Компоненты связности Γ^s_{kq} задаются формулой Леви-Чивита:

$$\Gamma^s_{kq} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{rq}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{kq}}{\partial x^r}\right) \tag{4.17}$$

(see § 7 из главы III в [53]). Применив (4.7) к величине g^{sr} в формуле (4.10), мы получим

$$\hat{g}^{sr} = g^{sr} - \varepsilon \sum_{k=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g^{sk}\, h_{kq}\, g^{qr} + \ldots\,. \tag{4.18}$$

Многоточием в (4.2), (4.8) и (4.18) мы обозначаем слагаемые более высоких порядков по малому параметру ε. Формула (4.18) аналогична формуле (4.5). Применив формулы (4.7) и (4.18) к (4.17), мы выводим формулу

$$\hat{\Gamma}^s_{kq} = \Gamma^s_{kq} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^{3} g^{sr}\, (\nabla_k\, h_{rq} + \nabla_q\, h_{kr} - \nabla_r\, h_{kq}) + \ldots\,. \tag{4.19}$$

Теперь применим формулу (4.19) к (4.16). Это даёт

$$\begin{gathered}\hat{\nabla}_{kq}\, g_{00} = \nabla_{kq}\, g_{00} - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} g^{sr} \bigl(\nabla_k\, h_{rq} + \\ + \nabla_q\, h_{kr} - \nabla_r\, h_{kq}\bigr)\, \nabla_s\, g_{00} + \ldots\,.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Помимо второй ковариантной производной (4.16) интеграл L_1 в (4.10) содержит g^{kq} и квадратный корень $\sqrt{\det g}$. Выражение g^{kq} преобразуется при помощи формулы (4.18). А для квадратного корня $\sqrt{\det g}$ мы пишем

$$\sqrt{\det \hat{g}} = \sqrt{\det g} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} g^{rs}\, h_{rs} \sqrt{\det g} + \ldots . \tag{4.21 }$$

Подобно производной по времени в формуле (2.4), формула (4.21) выводится при помощи формулы Якоби для дифференцирования детерминантов (см. [54]).

Сейчас мы применим (4.18), (4.20) и (4.21) к интегралу (4.10). В результате этого получим

$$\begin{gathered}\hat{L}_1 = L_1 + \frac{c_{\text{gr}}^4\, \varepsilon}{16\, \pi\, \gamma} \int \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{3} \sum_{\substack{k=1\\ q=1}}^{3} g_{00}^{-1/2} \left(g^{ik}\, g^{qj} - \frac{1}{2}\, g^{kq}\, g^{ij}\right) \cdot \\ \cdot \nabla_{kq}\, g_{00}\, h_{ij} \sqrt{\det g}\; d^3x + \frac{c_{\text{gr}}^4\, \varepsilon}{16\, \pi\, \gamma} \int \sum_{\substack{k=1\\ q=1}}^{3} \sum_{\substack{r=1\\ s=1}}^{3} g_{00}^{-1/2}\, \frac{g^{kq}\, g^{sr}}{2} \cdot \\ \cdot \bigl(\nabla_k\, h_{rq} + \nabla_q\, h_{kr} - \nabla_r\, h_{kq}\bigr)\, \nabla_s\, g_{00} \sqrt{\det g}\; d^3x + \ldots .\end{gathered} \tag{4.22}$$

Второй интеграл в формуле (4.22) преобразуется путём интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\hat{L}_1 = L_1 + \frac{c_{\text{gr}}^4\, \varepsilon}{16\, \pi\, \gamma} \int \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{3} \sum_{\substack{k=1\\ q=1}}^{3} g_{00}^{-1/2} \left(g^{ik}\, g^{qj} - \frac{1}{2}\, g^{kq}\, g^{ij}\right) \cdot \\ \cdot \nabla_{kq}\, g_{00}\, h_{ij} \sqrt{\det g}\; d^3x - \frac{c_{\text{gr}}^4\, \varepsilon}{16\, \pi\, \gamma} \int \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{3} \sum_{\substack{k=\\ q=1}}^{3} (2\, g^{ik}\, g^{qj} - \\ - g^{ij}\, g^{kq})\, \nabla_{kq}(g_{00}^{1/2})\, h_{ij} \sqrt{\det g}\; d^3x + \ldots .\end{gathered} \tag{4.23}$$

Интегрирование по частям в пространствах с метрикой основано на следующей формуле:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\nabla_k z^k\sqrt{\det g}\,d^3x=\int\limits_{\partial\Omega}g(\mathbf{z},\mathbf{n})\,dS. \tag{4.24}$$

Эта формула (4.24) является трёхмерной версией формулы (4.14) из главы IV в [3]. Заметим, что вторая ковариантная производная $\nabla_{kq}(g_{00}^{1/2})$ может быть записана как

$$\nabla_{kq}(g_{00}^{1/2})=\frac{1}{2}\,g_{00}^{-1/2}\,\nabla_{kq}g_{00}-\frac{1}{4}\,g_{00}^{-3/2}\,\nabla_k g_{00}\,\nabla_q g_{00}. \tag{4.25}$$

Применив соотношение (4.25) к (4.23), получаем

$$\begin{aligned}\hat{L}_1=L_1+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3}\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\left(g^{ik}\,g^{qj}-\frac{1}{2}\,g^{kq}\,g^{ij}\right)\cdot\\ \cdot\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\,h_{ij}\,\sqrt{\det g}\,d^3x+\ldots\,.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Второй интеграл (4.11) проще чем первый, поскольку ковариантные производные $\nabla_k\,g_{00}$ и $\nabla_q\,g_{00}$ не используют компонент связности (4.17). Применив формулы (4.18) и (4.21) к этому интегралу, мы выводим

$$\begin{aligned}\hat{L}_2=L_2-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3}\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\left(g^{ik}\,g^{qj}-\frac{1}{2}\,g^{kq}\,g^{ij}\right)\cdot\\ \cdot\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\,h_{ij}\,\sqrt{\det g}\,d^3x+\ldots\,.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Третий интеграл (4.12) самый сложный. Он содержит трёхмерную скалярную кривизну R. Скалярная кривизна

R вычисляется а несколько шагов. В первую очередь вычисляется тензор кривизны. Компоненты тензора кривизны определяются следующей формулой:

$$R^k_{qij} = \frac{\partial \Gamma^k_{jq}}{\partial r^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{iq}}{\partial r^j} + \sum_{s=1}^{3} \Gamma^k_{is}\,\Gamma^s_{jq} - \sum_{s=1}^{3} \Gamma^k_{js}\,\Gamma^s_{iq} \tag{4.28}$$

(см. формулу (1.1) в главе V из книги [3]). Далее формула (4.19) применяется к (4.28). Это даёт

$$\hat{R}^k_{qij} = R^k_{qij} + \varepsilon\,\left(\nabla_i Y^k_{jq} - \nabla_j Y^k_{iq}\right) + \ldots\,, \tag{4.29}$$

где сделаны следующие обозначения:

$$Y^s_{kq} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{3} g^{sr}\,\left(\nabla_k\,h_{rq} + \nabla_q\,h_{kr} - \nabla_r\,h_{kq}\right) \tag{4.30}$$

Тензор Риччи вычисляется через тензор кривизны. Компоненты тензора Риччи определяются следующей формулой:

$$R_{qj} = \sum_{k=1}^{3} R^k_{qkj}. \tag{4.31}$$

Применив формулу (4.29) к формуле (4.31), получаем

$$\hat{R}_{qj} = R_{qj} + \varepsilon \sum_{k=1}^{3} \left(\nabla_k Y^k_{jq} - \nabla_j Y^k_{kq}\right) + \ldots\,. \tag{4.32}$$

Скалярная кривизна вычисляется через тензор Риччи

$$R = \sum_{q=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g^{qj}\,R_{qj}. \tag{4.33}$$

Применив (4.18) и (4.32) к формуле (4.33), получаем

$$\hat{R} = R - \varepsilon \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} R^{ij}\, h_{ij} + \varepsilon \sum_{k=1}^{3} \nabla_{k} Z^{k} + \ldots\,, \tag{4.34}$$

где сделаны следующие обозначения:

$$Z^{k} = \sum_{q=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \bigl(g^{jq}\, Y^{k}_{jq} - g^{kq}\, Y^{j}_{jq}\bigr). \tag{4.35}$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы применить (4.34) к третьему интегралу L_3 в (4.12). Вместе с (4.34) мы применим формулу (4.21). В результате этого получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 = L_3 - \frac{c_{\text{gr}}^{4}\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{00}^{1/2} \left(R^{ij} - \frac{R}{2}\, g^{ij}\right) h_{ij}\,\cdot \\ \cdot \sqrt{\det g}\; d^3x + \frac{c_{\text{gr}}^{4}\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{k=1}^{3} g_{00}^{1/2}\, \nabla_{k} Z^{k} \sqrt{\det g}\; d^3x + \ldots\,. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Второй интеграл в правой части формулы (4.36) преобразуется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 = L_3 - \frac{c_{\text{gr}}^{4}\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{00}^{1/2} \left(R^{ij} - \frac{R}{2}\, g^{ij}\right) h_{ij}\,\cdot \\ \cdot \sqrt{\det g}\; d^3x - \frac{c_{\text{gr}}^{4}\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{k=1}^{3} Z^{k}\, \nabla_{k}(g_{00}^{1/2}) \sqrt{\det g}\; d^3x + \ldots\,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Чтобы сделать второй интеграл в (4.37) явным, мы посчитаем Z^k в явном виде путём подстановки (4.30) в (4.35). Это даёт

$$Z^{k} = \sum_{q=1}^{3} \nabla_{q}\, h^{kq} - \sum_{q=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} g^{kq}\, \nabla_{q}\, h^{r}_{r}. \tag{4.38}$$

Перед подстановкой (4.38) в (4.37) мы преобразуем эту формулу следующим образом:

$$Z^k=\sum_{q=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\bigl(g^{ki}\,g^{jq}\,\nabla_q\,h_{ij}-g^{kq}\,g^{ij}\,\nabla_q\,h_{ij}\bigr).\tag{4.39}$$

Теперь мы подставим (4.39) в формулы (4.37) и применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}\hat{L}_3=L_3-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{00}^{1/2}\left(R^{ij}-\frac{R}{2}\,g^{ij}\right)h_{ij}\,\cdot\\ \cdot\sqrt{\det g}\;d^3x+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\bigl(g^{ki}\,g^{jq}\,-\\ -\,g^{kq}\,g^{ij}\bigr)\,\nabla_{kq}(g_{00}^{1/2})\,h_{ij}\sqrt{\det g}\;d^3x+\ldots\,.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Интеграл L_4 в (4.13) гораздо проще, чем предыдущий. Это потому что он не содержит пространственных производных метрики g_{ij}. Перед тем как применить (4.18) и (4.21), мы запишем интеграл (4.13) в виде

$$\begin{aligned}L_4=\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{00}^{-1/2}\,g^{ki}\,b_{iq}\,\cdot\\ \cdot\,g^{qj}\,b_{jk}\sqrt{\det g}\;d^3x.\end{aligned}\tag{4.41}$$

Затем, применив (4.18) и (4.21) к (4.41), мы получим

$$\begin{aligned}\hat{L}_4=L_4+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3}\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3}g_{00}^{-1/2}\,b^k_q\,b^q_k\,\frac{g^{ij}}{2}\,h_{ij}\sqrt{\det g}\;d^3x\,-\\ -\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3}\sum_{k=1}^{3}g_{00}^{-1/2}(b^{ik}\,b^j_k+b^{jk}\,b^i_k)\,h_{ij}\sqrt{\det g}\;d^3x+\ldots\,.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Интеграл L_5 в (4.14) преобразуется аналогичным образом. Прежде всего мы перепишем его в виде

$$\begin{gathered} L_5 = -\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{00}^{-1/2}\, g^{ik}\, b_{ik}\,\cdot \\ \cdot\, g^{qj}\, b_{qj} \sqrt{\det g}\; d^3x. \end{gathered} \tag{4.43}$$

Далее, применив (4.18) и (4.21) к (4.43), получаем

$$\begin{gathered} \hat{L}_5 = L_5 + \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3} \sum_{k=1}^{3} 2\, g_{00}^{-1/2}\, b_k^k\, b^{ij}\, h_{ij} \sqrt{\det g}\; d^3x\, - \\ - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{3} \sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3} g_{00}^{-1/2}\, b_k^k\, b_q^q\, \frac{g^{ij}}{2}\, h_{ij} \sqrt{\det g}\; d^3x + \ldots\,. \end{gathered} \tag{4.44}$$

Интеграл L_6 в (4.15) является самым простым из шести интегралов в (4.9). Применив формулу (4.21) к нему, получим

$$\begin{gathered} \hat{L}_6 = L_6 - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma} \int \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{00}^{1/2}\, 2\,\Lambda\, \frac{g^{ij}}{2}\,\cdot \\ \cdot\, h_{ij} \sqrt{\det g}\; d^3x + \ldots\,. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Теперь мы можем собрать вместе формулы (4.26), (4.27), (4.40), (4.42), (4.44) и (4.45) и вывести формулу для искомой частной вариационной производной

$$\begin{gathered} \left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{ij}}\right)_{\substack{g,\dot{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} = \frac{c_{\text{gr}}^4\, g_{00}^{-1/2}}{16\,\pi\,\gamma} \left(\sum_{k=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} b_q^k\, b_k^q\, \frac{g^{ij}}{2}\, - \right. \\ - \sum_{k=1}^{3} (b^{ik}\, b_k^j + b^{jk}\, b_k^i) + \sum_{k=1}^{3} 2\, b_k^k\, b^{ij} - \sum_{k=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} b_k^k\,\cdot \\ \left. \cdot\, b_q^q\, \frac{g^{ij}}{2}\right) - \frac{c_{\text{gr}}^4\, g_{00}^{1/2}}{16\,\pi\,\gamma} \left(R^{ij} - \frac{R}{2}\, g^{ij} + \Lambda\, g^{ij}\right) + \end{gathered} \tag{4.46}$$

$$+\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\bigl(g^{ki}\,g^{jq}-g^{kq}\,g^{ij}\bigr)\,\nabla_{kq}(g_{00}^{1/2}).$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы собрать вместе формулы (4.4), (4.6) и (4.46) и подставить их в уравнение (3.15). В результате такого действия получается уравнение

$$\begin{gathered}
\frac{g_{00}^{-2}}{2\,c_{\text{gr}}}\left(\sum_{k=1}^{3}b_k^k\,g^{ij}-b^{ij}\right)\dot{g}_{00}+\frac{g_{00}^{-1}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\bigl(g^{kq}\,g^{ij}-\\
-g^{ki}\,g^{jq}\bigr)\,\nabla_{kq}\,g_{00}-\frac{g_{00}^{-2}}{4}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\bigl(g^{kq}\,g^{ij}-g^{ki}\,g^{jq}\bigr)\,\cdot\\
\cdot\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}+g_{00}^{-1}\left(\frac{1}{c_{\text{gr}}}\,\dot{b}^{ij}-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{c_{\text{gr}}}\,\dot{b}_k^k\,g^{ij}+\sum_{k=1}^{3}(b^{ik}\,\cdot\right.\\
\cdot\,b_k^j+b^{jk}\,b_k^i)-\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_q^k\,b_k^q\,\frac{g^{ij}}{2}-\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_k^k\,b_q^q\,\frac{g^{ij}}{2}+\\
\left.+\sum_{k=1}^{3}b_k^k\,b^{ij}\right)+R^{ij}-\frac{R}{2}\,g^{ij}+\Lambda\,g^{ij}=\frac{16\,\pi\,\gamma}{c_{\text{gr}}^4\,g_{00}^{1/2}}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{ij}}.
\end{gathered}\tag{4.47}$$

Уравнение (4.47) и уравнение (6.2) во второй главе отличаются расположением индексов i и j. Чтобы сравнить уравнение (4.47) с уравнением (6.2) во второй главе, нам нужно выполнить опускание индексов i и j в уравнении (4.47). При выполнении этой процедуры мы воспользуемся соотношением

$$\dot{b}^{ij}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{ik}\,\dot{b}_{kq}\,g^{qj}-\sum_{k=1}^{3}2\,c_{\text{gr}}\,(b^{ik}\,b_k^j+b^{jk}\,b_k^i).\tag{4.48}$$

Для вывода соотношения (4.48) используются формулы (4.8) и (2.2) из второй главы. После этого применение формул

(4.48) и (3.13) к уравнению (4.47) в процессе опускания индексов i и j даёт следующее уравнение:

$$\begin{gathered}
\frac{g_{00}^{-2}}{2\,c_{\mathrm{gr}}}\left(\sum_{k=1}^{3} b_k^k\,g_{ij}-b_{ij}\right)\dot g_{00}+\frac{g_{00}^{-1}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}(g^{kq}\,g_{ij}-\\
-\delta_i^k\,\delta_j^q)\,\nabla_{kq}\,g_{00}-\frac{g_{00}^{-2}}{4}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}(g^{kq}\,g_{ij}-\delta_i^k\,\delta_j^q)\,\cdot\\
\cdot\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}+g_{00}^{-1}\left(\frac{1}{c_{\mathrm{gr}}}\,\dot b_{ij}-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{c_{\mathrm{gr}}}\,\dot b_k^k\,g_{ij}-\sum_{k=1}^{3}(b_{ki}\,\cdot\right.\\
\cdot\,b_j^k+b_{kj}\,b_i^k)-\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_q^k\,b_k^q\,\frac{g_{ij}}{2}-\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_k^k\,b_q^q\,\frac{g_{ij}}{2}+\\
\left.+\sum_{k=1}^{3}b_k^k\,b_{ij}\right)+R_{ij}-\frac{R}{2}\,g_{ij}+\Lambda\,g_{ij}=-\frac{16\,\pi\,\gamma}{c_{\mathrm{gr}}^4\,g_{00}^{1/2}}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\delta g^{ij}}.
\end{gathered}\tag{4.49}$$

Сравнив (4.49) с уравнением (6.2) во второй главе, получаем

$$T_{ij}=-\frac{2}{g_{00}^{1/2}}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\delta g^{ij}}\quad\text{для}\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3.\tag{4.50}$$

Слева в соотношениях (4.50) мы видим часть компонент тензора энергии-импульса, которые вошли в уравнение (6.2) из второй главы. Соотношение (4.50) выражает эти компоненты тензора энергии-импульса, которые являются наследием четырёхмерной теории Эйнштейна, через чисто трёхмерную плотность лагранжиана материи (3.6).

Теорема 4.1. *Уравнения гравитации (6.2) из второй главы равносильны уравнениям Эйлера-Лагранжа (3.16), которые в явном виде записываются как уравнения (4.47) или как уравнения (4.49).*

§ 5. Уравнение для скалярного поля g_{00}.

Зависящее от времени скалярное поле g_{00} возникает как диагональная компонента блочно-диагональной четырёхмерной метрики, унаследованной из теории Эйнштейна, см. формулы (2.9) и (2.6) во второй главе. Оно положительно в силу сигнатуры $(+,-,-,-)$ метрики (2.6) во второй главе. Поле g_{00} описывается уравнением Эйлера-Лагранжа (3.17). Наша цель здесь — записать это уравнение в более явной форме.

Пользуясь формулами (3.3) и (2.7), мы легко замечаем, что плотность лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ не зависит от производной по времени $\dot{g}_{00}$. Поэтому имеет место соотношение

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta\dot{g}_{00}}\right)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} = 0. \tag{5.1}$$

В силу (5.1) уравнение Эйлера-Лагранжа (3.17) сводится к

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{00}}\right)_{\substack{\dot{g},\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} = -\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{mat}}}{\delta g_{00}}. \tag{5.2}$$

Чтобы посчитать частную вариационную производную в левой части уравнения (5.2), мы рассмотрим малую вариацию скалярного поля $\dot{g}_{00}$:

$$\hat{g}_{00} = g_{00}(t,x^1,x^2,x^3) + \varepsilon\, h(t,x^1,x^2,x^3). \tag{5.3}$$

Здесь $\varepsilon\to 0$ — это малый параметр, а $h(t,x^1,x^2,x^3)$ — произвольная гладкая функция с компактным носителем (см. [56]). Малая вариация (5.3) применяется к лагранжиану L_{gr} в (3.1). После этого частная вариационная производная плотности лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ по g_{00} определяется формулой

$$\hat{L}_{\text{gr}} = L_{\text{gr}} + \varepsilon\int\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{00}}\right)_{\substack{\dot{g},\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}} h\sqrt{\det g}\, d^3x + \ldots\,. \tag{5.4}$$

Как и в § 4, здесь мы разделим лагранжиан L_{gr} на шесть частей, используя для этого формулу (4.9). Интегралы L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 и L_6 в (4.9) задаются формулами (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) и (4.15). Применив (5.3) к первому из этих шести интегралов, мы получаем

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 = L_1 - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3} g^{kq}\,g_{00}^{-1/2}\,\nabla_{kq}\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x\,+\\+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3} g^{kq}\,\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\,\nabla_{kq}\,g_{00}\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x+\ldots\,.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Первый интеграл в формуле (5.5) преобразуется при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 = L_1 - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\frac{3\,g_{00}^{-5/2}}{4}\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\,\cdot\\\cdot\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,g_{00}^{-3/2}\,\cdot\\\cdot\,\nabla_{kq}\,g_{00}\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x+\ldots\,.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Дальше мы переходим к интегралу L_2 в (4.11) и применяем к нему вариацию (5.3). Это даёт

$$\begin{aligned}\hat{L}_2 = L_2 + \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,g_{00}^{-3/2}\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,\cdot\\\cdot\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\frac{3\,g_{00}^{-5/2}}{4}\,\cdot\\\cdot\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x+\ldots\,.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Первый интеграл в формуле (5.7) преобразуется при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\hat{L}_2 = L_2 - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,g_{00}^{-3/2}\,\nabla_{kq}\,g_{00}\,\cdot\\ \cdot\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\frac{3\,g_{00}^{-5/2}}{4}\,\cdot\\ \cdot\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \ldots\,.\end{gathered}\tag{5.8}$$

Следующим по очереди является интеграл L_3 в (4.12). Применив к нему вариацию (5.3), получаем

$$\hat{L}_3 = L_3 + \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\frac{g_{00}^{-1/2}}{2}\,R\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \ldots\,.\tag{5.9}$$

Далее мы переходим к интегралу L_4 в (4.13). Применив к нему вариацию (5.3), получаем

$$\begin{gathered}\hat{L}_4 = L_4 - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\,b^k_q\,b^q_k\,\cdot\\ \cdot\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \ldots\,.\end{gathered}\tag{5.10}$$

Интеграл L_5 в (4.14) обрабатывается похожим образом. Применив к нему вариацию (5.3), получаем

$$\begin{gathered}\hat{L}_5 = L_5 + \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\,b^k_k\,b^q_q\,\cdot\\ \cdot\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \ldots\,.\end{gathered}\tag{5.11}$$

И наконец мы приходим к интегралу L_6 в (4.15). Применив вариацию (5.3) к нему, мы получаем

$$\hat{L}_6 = L_6 - \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int g_{00}^{-1/2}\,\Lambda\,h\,\sqrt{\det g}\,d^3x.\tag{5.12}$$

Теперь мы можем собрать вместе формулы (5.6), (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) и (5.12) и применить их все к формуле (5.4). В результате этого получим

$$\begin{gathered}\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm gr}}{\delta g_{00}}\Big)_{\substack{\dot{g},\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}}}=\frac{c_{\rm gr}^4}{16\,\pi\,\gamma}\,\frac{g_{00}^{-1/2}}{2}\big(R-2\Lambda\big)+\\ +\frac{c_{\rm gr}^4}{16\,\pi\,\gamma}\,\frac{g_{00}^{-3/2}}{2}\bigg(\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_k^k\,b_q^q-\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_q^k\,b_k^q\bigg).\end{gathered}\tag{5.13}$$

Далее путём подстановки (5.13) в (5.2) мы выводим уравнение

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_q^k\,b_k^q+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_k^k\,b_q^q+\\ +\frac{R}{2}\,g_{00}-\Lambda\,g_{00}=-\frac{16\,\pi\,\gamma}{c_{\rm gr}^4}g_{00}^{3/2}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm mat}}{\delta g_{00}}.\end{gathered}\tag{5.14}$$

Если мы вспомним соотношение $g^{00}=g_{00}^{-1}$ и применим формулу (3.15), вытекающую из этого соотношения, то уравнение (5.14) может быть переписано в виде

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_q^k\,b_k^q+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}b_k^k\,b_q^q+\\ +\frac{R}{2}\,g_{00}-\Lambda\,g_{00}=\frac{16\,\pi\,\gamma}{c_{\rm gr}^4\,g_{00}^{1/2}}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm mat}}{\delta g^{00}}.\end{gathered}\tag{5.15}$$

Путём сравнения уравнения (5.15) с уравнением (6.3) во второй главе мы выводим соотношение

$$T_{00}=\frac{2}{g_{00}^{1/2}}\,\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm mat}}{\delta g^{00}}.\tag{5.16}$$

Слева в соотношении (5.16) мы видим одну из компонент тензора энергии-импульса, которая входит в уравнение (6.3) из второй главы. Соотношение (5.16) выражает эту компоненту T_{00} тензора энергии-импульса, которая являются наследием четырёхмерной теории Эйнштейна, через чисто трёхмерную плотность лагранжиана материи (3.6).

Теорема 5.1. *Уравнение гравитации* (6.3) *из второй главы равносильно уравнению Эйлера-Лагранжа* (3.17), *которое в явном виде записывается как уравнение* (5.14) *или как уравнения* (5.15).

Заметим, что уравнений, аналогичных уравнениям (6.1) во второй главе, в рамках лагранжевого подхода не возникает. Это оправдывает сделанный во второй главе выбор в пользу уравнений (6.2) и (6.3) и исключение из нашей новой теории гравитации уравнений (6.1).

§ 6. Обобщённые координаты и скорости.

Динамические переменные в лагранжевом подходе часто называют обобщёнными координатами, а их производные по времени — обобщёнными скоростями (см. [57]). Динамическими переменными для гравитационного поля являются функции g_{ij} и g_{00}. В случае функции g_{ij} её производная по времени связана с функцией b_{ij}. Из формул (4.8) и (2.2) во второй главе следует соотношение

$$b_{ij}=\frac{1}{2\,c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}. \tag{6.1}$$

В силу (6.1) роль обобщённых скоростей для динамических переменных g_{ij} будут играть функции b_{ij}.

По аналогии с формулой (6.1) в работе [31] были введены следующие обозначения:

$$b_{00}=\frac{\dot g_{00}}{c_{\text{gr}}}=\frac{1}{c_{\text{gr}}}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial t}, \qquad\qquad b^0_0=g^{-1}_{00}\,b_{00}. \tag{6.2}$$

В силу (6.2) роль обобщённой скорости для динамической переменной g_{00} будет играть функция b_{00}.

Зависимость лагранжиана гравитационного поля от обобщённых координат и обобщённых скоростей в условном виде изображается формулой (3.4). С учётом (6.2) эта формула переписывается следующим образом:

$$L_{\mathrm{gr}} = L_{\mathrm{gr}}(g, b, \mathbf{g}, \mathbf{b}). \tag{6.3}$$

Для описания материи выше в § 3 были введены дополнительные динамические переменные $Q_1, \ldots, Q_n$ и соответствующие им обобщённые скорости (3.5). Обозначим их $W_1, \ldots, W_n$, то есть положим

$$W_i = \dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \tag{6.4}$$

С учётом (6.4) формула (3.6) записывается в виде

$$L_{\mathrm{mat}} = L_{\mathrm{mat}}(g, b, \mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}). \tag{6.5}$$

Полный лагранжиан есть сумма лагранжиана гравитационного поля и лагранжиана материи:

$$L = L_{\mathrm{gr}} + L_{\mathrm{mat}}. \tag{6.6}$$

Формула (6.6) вытекает из (3.7) и (3.8). Далее из формул (6.3), (6.5) и (6.6) выводим

$$L = L(g, \dot{g}, \mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{Q}, \mathbf{W}). \tag{6.7}$$

Каждый аргумент в списке аргументов L_{gr}, L_{mat} и L в (3.4), (6.5) и (6.7) изображает не только соответствующие группы динамических переменных, но и некоторое конечное количество их производных различных порядков по пространственным переменным x^1, x^2, x^3.

§ 7. Преобразование Лежандра и плотность энергии.

Преобразование Лежандра — это замена динамических переменных, при которой обобщённые скорости заменяются обобщёнными импульсами (см. [58]). В нашем случае обобщённые импульсы вычисляются как частные вариационные производные полного лагранжиана (6.5):

$$\beta^{ij} = \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}, \ \ \beta^{00} = \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{00}}\right)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}, \ \ P^{i} = \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta W_{i}}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}}. \tag{7.1}$$

Через обобщённые импульсы (7.1) плотность полной энергии вычисляется по формуле

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta^{ij}\,b_{ij} + \beta^{00}\,b_{00} + \sum_{i=1}^{n} P^{i}\,W_{i} - \mathcal{L}. \tag{7.2}$$

Пусть Ω — трёхмерная область в трёхмерной вселенной. Энергия гравитационного поля и полей материи, заключённая в этой области, задаётся следующим интегралом:

$$E(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\,\sqrt{\det g}\,d^{3}x. \tag{7.3}$$

Основная наша цель в следующем параграфе — это вывести формулу для производной по времени интеграла (7.3).

§ 8. Закон сохранения энергии.

Рассмотрим малое приращение переменной времени t. Запишем его в следующем виде:

$$\hat{t} = t + \varepsilon. \tag{8.1}$$

Применим (8.1) ко всем динамическим переменным:

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij}(\hat{t}, x^{1}, x^{2}, x^{3}), \qquad \hat{Q}_{i} = Q_{i}(\hat{t}, x^{1}, x^{2}, x^{3}), \tag{8.2}$$

$$\hat{b}_{ij} = b_{ij}(\hat{t}, x^1, x^2, x^3), \qquad \hat{W}_i = W_i(\hat{t}, x^1, x^2, x^3), \tag{8.3}$$

$$\hat{\beta}^{ij} = \beta^{ij}(\hat{t}, x^1, x^2, x^3), \qquad \hat{P}^i = P^i(\hat{t}, x^1, x^2, x^3), \tag{8.4}$$

$$\hat{g}_{00} = g_{00}(\hat{t}, x^1, x^2, x^3), \qquad \hat{b}_{00} = b_{00}(\hat{t}, x^1, x^2, x^3), \tag{8.5}$$

$$\hat{\beta}^{00} = \beta^{00}(\hat{t}, x^1, x^2, x^3). \tag{8.6}$$

Применив соотношения (6.1) и (6.4) к (8.2), получаем

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + 2\, c_{\text{gr}}\, \varepsilon\, b_{ij} + \ldots, \qquad \hat{Q}_i = Q_i + \varepsilon\, W_i + \ldots. \tag{8.7}$$

В случае с (8.3) мы используем частные производные:

$$\hat{b}_{ij} = b_{ij} + \varepsilon\, \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + \ldots, \qquad \hat{W}_i = W_i + \varepsilon\, \frac{\partial W_i}{\partial t} + \ldots. \tag{8.8}$$

В случае с (8.4) и (8.6) мы применим соотношения (7.1):

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{ij} &= \beta^{ij} + \varepsilon\, \frac{\partial}{\partial t}\biggl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\biggr)_{\substack{g,b,\mathbf{g},\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} + \ldots, \\ \hat{P}^i &= P^i + \varepsilon\, \frac{\partial}{\partial t}\biggl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta W_i}\biggr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}} + \ldots, \\ \hat{\beta}^{00} &= \beta^{00} + \varepsilon\, \frac{\partial}{\partial t}\biggl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta b_{00}}\biggr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} + \ldots. \end{aligned} \tag{8.9}$$

В случае с (8.5) мы применим (6.2) и частную производную по времени от функции b_{00}:

$$\hat{g}_{00} = g_{00} + c_{\text{gr}}\, \varepsilon\, b_{00} + \ldots, \qquad \hat{b}_{00} = b_{00} + \varepsilon\, \frac{\partial b_{00}}{\partial t} + \ldots. \tag{8.10}$$

Многоточием в (8.7), (8.8), (8.9), (8.10) и далее мы обозначаем слагаемые более высокого порядка по параметру $\varepsilon \to 0$.

Кроме (8.7), (8.8), (8.9), (8.10) мы рассмотрим соотношение:

$$\sqrt{\det \hat{g}} = \sqrt{\det g}\,\biggl(1 + \varepsilon\, c_{\text{gr}} \sum_{k=1}^{3} b^k_k + \ldots\biggr). \tag{8.11}$$

Соотношение (8.11) выведено с использованием уже знакомой нам формулы Якоби для дифференцирования детерминантов (см. [54]) и соотношения (6.1).

Следующий шаг состоит в том, чтобы применить вариацию времени (8.1) к интегралу (7.3) с учётом (7.2):

$$\begin{gathered}
\hat{E}(\Omega)=\int\limits_{\Omega}\Bigl(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\beta^{ij}\,b_{ij}+\beta^{00}\,b_{00}+\sum_{i=1}^{n}P^{i}\,W_{i}\Bigr)\cdot\\
\cdot\sqrt{\det\hat{g}}\;d^3x+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\biggl(\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,b_{ij}+\\
+\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}\biggr)\sqrt{\det g}\;d^3x+\\
+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\biggl(\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta W_i}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}}\,W_i+\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta W_i}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}}\,\frac{\partial W_i}{\partial t}\biggr)\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\;d^3x+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\biggl(\frac{\partial}{\partial t}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,b_{00}+\\
+\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,\frac{\partial b_{00}}{\partial t}\biggr)\sqrt{\det g}\;d^3x-\hat{L}(\Omega)+\ldots\,.
\end{gathered}\tag{8.12}$$

Последнее слагаемое $\hat{L}(\Omega)$ в (8.12) определяется плотностью лагранжиана $\mathcal{L}$ в (7.2):

$$\hat{L}(\Omega)=\int\limits_{\Omega}\hat{\mathcal{L}}\sqrt{\det\hat{g}}\;d^3x.\tag{8.13}$$

Для того чтобы преобразовать интеграл (8.13), надо заметить, что формулы (8.7), (8.8) и (8.10) похожи на малые вариации тензорных полей $\mathbf{g}$ и $\mathbf{b}$, на малые вариации динамических переменных материи $Q_1,\,\ldots\,,\,Q_n$ и $W_1,\,\ldots\,,\,W_n$, а также на малые вариации скалярных полей g_{00} и b_{00} в смысле вариационного исчисления:

$$
\begin{aligned}
&\hat{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\, h_{ij} + \ldots\,, &&\hat{Q}_i = Q_i + \varepsilon\, h_i + \ldots\,,\\
&\hat{b}_{ij} = b_{ij} + \varepsilon\, \eta_{ij} + \ldots\,, &&\hat{W}_i = W_i + \varepsilon\, \eta_i + \ldots\,,\\
&\hat{g}_{00} = g_{00} + \varepsilon\, h_{00} + \ldots\,, &&\hat{b}_{00} = b_{00} + \varepsilon\, \eta_{00} + \ldots\,.
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

Функции h_{ij}, h_i, η_{ij}, η_i, h_{00} и η_{00} в (8.14) являются функциями с компактным носителем (see [56]). В вариационном исчислении они применяются к интегралу по всей вселенной:

$$
L = \int \mathcal{L}\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{8.15}
$$

Применив малые вариации (8.14) к интегралу (8.15) в рамках вариационного исчисления, мы бы записали

$$
\begin{gathered}
\hat{L} = L + \varepsilon \int\biggl(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,\eta_{ij}\,+\\
+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,h_{ij} + \Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,\eta_{00}\,+\\
+\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{00}}\Bigr)_{\substack{b,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}}\,h_{00} + \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta W_i}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}}\,\eta_i\,+\\
+\sum_{i=1}^{n}\Bigl(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta Q_i}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{W}}}\,h_i\biggr)\sqrt{\det g}\,d^3x + \ldots\,.
\end{gathered}
\tag{8.16}
$$

Отличие малых вариаций (8.7), (8.8) и (8.10) от малых вариаций в (8.14) состоит в том, что малые вариации в (8.7), (8.8) и (8.10) не являются функциями с компактным носителем. По этой причине аналог формулы (8.16) для интеграла (8.13) будет иметь дополнительное слагаемое, содержащее интеграл по границе области Ω:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}(\Omega) = L(\Omega) &+ \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \Bigl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta b_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} \cdot \\
&\cdot \sqrt{\det g}\, d^3x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Biggl(\sum_{i=1}^{n} \Bigl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta W_i}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}} \frac{\partial W_i}{\partial t} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \Bigl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_i}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{W}}} W_i\Biggr) \sqrt{\det g}\, d^3x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Biggl(\Bigl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta b_{00}}\Bigr)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} \cdot \\
&\cdot \frac{\partial b_{00}}{\partial t} + \Bigl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{00}}\Bigr)_{\substack{b,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} c_{\text{gr}}\, b_{00}\Biggr) \sqrt{\det g}\, d^3x + \\
&+ \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \Bigl(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{ij}}\Bigr)_{\substack{g,b,\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} 2\, c_{\text{gr}}\, b_{ij} \sqrt{\det g}\, d^3x + \\
&+ \varepsilon \int\limits_{\partial\Omega} (\mathcal{J}^1\, dx^2 \wedge dx^3 + \mathcal{J}^2\, dx^3 \wedge dx^1 + \\
&+ \mathcal{J}^3\, dx^1 \wedge dx^2) \sqrt{\det g} + \ldots .
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Дополнительное слагаемое с интегралом по границе области в (8.17) связан с потоком энергии через эту границу. Мы подробно изучим это слагаемое в следующем параграфе.

А сейчас мы возвращаемся к формуле (8.12). Квадратный корень в первом из интегралов формулы (8.12) преобразуется при помощи формулы (8.11). После этого мы можем применить формулу (8.11) и формулу (8.17) к формуле (8.12). Выполняя эту операцию, мы принимаем во внимание формулы (4.1), а также уравнения Эйлера-Лагранжа (3.9), (3.10) и (3.11). Кроме того мы учитываем сделанные выше обозначения (6.1), (6.2) и (6.4). В результате перечисленных преобразований формула (8.12) для вариации интеграла энергии (7.3) упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{E}(\Omega) = E(\Omega) - \varepsilon \int\limits_{\partial\,\Omega} \bigl(\mathcal{J}^1\,dx^2 \wedge dx^3 \,+\\ + \mathcal{J}^2\,dx^3 \wedge dx^1 + \mathcal{J}^3\,dx^1 \wedge dx^2\bigr)\,\sqrt{\det g} + \ldots\,.\end{aligned} \tag{8.18}$$

Теперь вспомним, что вариация интеграла энергии (8.18) возникает в результате приращения времени (8.1). Поэтому её можно вычислить непосредственным образом через производную интеграла (7.3) по времени:

$$\hat{E}(\Omega) = E(\Omega) + \varepsilon\,\frac{dE(\Omega)}{dt} + \ldots\,. \tag{8.19}$$

Сравнивая (8.18) и (8.19), мы выводим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \int\limits_{\partial\,\Omega} \bigl(\mathcal{J}^1\,dx^2 \wedge dx^3 \,+\\ +\,\mathcal{J}^2\,dx^3 \wedge dx^1 + \mathcal{J}^3\,dx^1 \wedge dx^2\bigr)\,\sqrt{\det g} = 0.\end{aligned} \tag{8.20}$$

Поверхностный интеграл второго рода в (8.20) можно заменить поверхностным интегралом первого рода:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \int\limits_{\partial\,\Omega} \bigl(\mathcal{J}^1\,n_1 + \mathcal{J}^2\,n_2 + \mathcal{J}^3\,n_3\bigr)\,dS = 0. \tag{8.21}$$

Здесь n_1, n_2, n_3 — это ковариантные компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$, перпендикулярного к границе области $\partial\,\Omega$, а dS — это элемент площади на этой границе. Величины $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$, $\mathcal{J}^3$ в (8.21) интерпретируются как компоненты векторного поля $\mathbf{J}$. Само это векторное поле интерпретируется как плотность потока полной энергии:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathcal{H}\,\sqrt{\det g}\,d^3x + \int\limits_{\partial\,\Omega} \sum_{i=1}^{3} \mathcal{J}^i\,n_i\,dS. \tag{8.22}$$

Равенство (8.22) можно озвучить в форме теоремы.

Теорема 8.1. *Увеличение количества полной энергии гравитационного поля и полей материи, заключённой в трёхмерной области Ω, за единицу времени в точности равно количеству энергии, поступающей за единицу времени в область Ω через её границу $\partial\,\Omega$.*

Для того чтобы преобразовать интегральное равенство (8.22) в дифференциальную форму, мы применим формулу Остроградского-Гаусса (см. [59]) вместе с формулой (8.11). Это даёт следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}+\sum_{q=1}^{3}c_{\text{gr}}\,\mathcal{H}\,b^q_q+\sum_{i=1}^{3}\nabla_{i}\mathcal{J}^{i}=0. \tag{8.23}$$

Первое слагаемое в (8.23) — это производная по времени от плотности полной энергии гравитационного поля и полей материи. Третье слагаемое — это дивергенция вектора плотности потока полной энергии. Эти два слагаемых стандартны. Второе слагаемое в (8.23) — это хаббловский член. Он возникает из-за того, что объём области Ω может меняться даже при условии полной неподвижности границ области по причине расширения или сжатия самого трёхмерного пространства вселенной (см. [60]).

§ 9. Плотность потока полной энергии.

Вектор $\mathbf{J}$ с компонентами $\mathcal{J}^1$, $\mathcal{J}^2$, $\mathcal{J}^3$ возник в (8.17) при выводе аналога формулы (8.16), в которой малые вариации динамических переменных не являются функциями с компактным носителем. Мы знаем, что лагранжиан (6.7) зависит не только от функций, перечисленных в списке его аргументов, но и от некоторого конечного числа их частных производных по пространственным переменным x^1, x^2, x^3. По этой причине мы введём следующие обозначения:

$$Q_i[i_1 \ldots i_s] = \frac{\partial Q_i}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_s}}, \; W_i[i_1 \ldots i_s] = \frac{\partial W_i}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_s}}, \tag{9.1}$$

$$g_{ij}[i_1 \ldots i_s] = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_s}}, \; b_{ij}[i_1 \ldots i_s] = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_s}}, \tag{9.2}$$

$$g_{00}[i_1 \ldots i_s] = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_s}}, \; b_{00}[i_1 \ldots i_s] = \frac{\partial b_{00}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_s}}. \tag{9.3}$$

Выберем величину $b_{ij}[i_1 \ldots i_s]$ из (9.2) и рассмотрим её вхождение в лагранжиан (6.7). Вариация величины b_{ij} в (8.14) даёт вклад в вариационное разложение интеграла (8.13) в форме следующего выражения:

$$I(\mathbf{b}) = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Bigl(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1 \ldots i_s]} \sqrt{\det g} \,\Bigr) \, \eta_{ij}[i_1 \ldots i_s] \, d^3x. \tag{9.4}$$

Обозначим через ι_q линейное отображение, действующее на дифференциальные 3-формы и производящее дифференциальные 2-формы, такие что

$$\iota_q(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = \begin{cases} dx^2 \wedge dx^3 & \text{if} \;\; q = 1, \\ dx^3 \wedge dx^1 & \text{if} \;\; q = 2, \\ dx^1 \wedge dx^2 & \text{if} \;\; q = 3. \end{cases} \tag{9.5}$$

После этого мы можем интегрировать (9.4) по частям. Результат записывается с использованием (9.5):

$$\begin{gathered} \varepsilon \int\limits_{\Omega} \Bigl(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1 \ldots i_s]} \sqrt{\det g} \,\Bigr) \, \eta_{ij}[i_1 \ldots i_s] \, d^3x = \\ = \varepsilon \int\limits_{\partial\,\Omega} \Bigl(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1 \ldots i_s]} \sqrt{\det g} \,\Bigr) \, \eta_{ij}[i_1 \ldots i_{s-1}] \, \cdot \\ \cdot \, \iota_{i_s}(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) - \varepsilon \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \Bigl(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1 \ldots i_s]} \, \cdot \\ \cdot \, \sqrt{\det g} \,\Bigr) \, \eta_{ij}[i_1 \ldots i_{s-1}] \, d^3x. \end{gathered} \tag{9.6}$$

Последнее слагаемое в формуле (9.6) похоже на первое. Поэтому мы можем продолжить интегрирование по частям в (9.6) итеративно. Полученный результат записывается так:

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{b})=\sum_{r=1}^{s}\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1\ldots i_s]}\,\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\,\biggr)\,\eta_{ij}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\,\varepsilon\int\limits_{\Omega}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\biggr)\,\eta_{ij}\,d^3x.
\end{gathered}\tag{9.7}
$$

Последнее слагаемое в (9.7) даёт вклад в объёмные интегралы в (8.17). Предыдущие слагаемые дают вклад в интеграл по границе области в (8.17).

Вариация метрики g_{ij} из (9.2) даёт вклад в вариационное разложение интеграла (8.13) посредством выражения

$$
I(\mathbf{g})=\varepsilon\int\limits_{\Omega}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{ij}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\biggr)\,h_{ij}[i_1\ldots i_s]\,d^3x.\tag{9.8}
$$

Интегрируя по частям итеративно в (9.8), мы выводим формулу, похожую на формулу (9.7):

$$
\begin{gathered}
I(\mathbf{g})=\sum_{r=1}^{s}\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{ij}[i_1\ldots i_s]}\,\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\,\biggr)\,h_{ij}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\,\varepsilon\int\limits_{\Omega}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{ij}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\biggr)\,h_{ij}\,d^3x.
\end{gathered}\tag{9.9}
$$

Следующие два шага похожи на предыдущие два. Аналоги формул (9.4) и (9.8) в случае динамических переменных, отвечающих за материю в (9.1), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&I(\mathbf{W})=\varepsilon\int\limits_{\Omega}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_i[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,\eta_i[i_1\ldots i_s]\,d^3x,\\
&I(\mathbf{Q})=\varepsilon\int\limits_{\Omega}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,h_i[i_1\ldots i_s]\,d^3x.
\end{aligned}\tag{9.10}$$

Интегрируя по частям в (9.10), мы получим формулы, похожие на формулы (9.7) и (9.9):

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{W})=&\sum_{r=1}^{s}\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_i[i_1\ldots i_s]}\,\cdot\\
&\cdot\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,\eta_i[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
&+\varepsilon\int\limits_{\Omega}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_i[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,\eta_i\,d^3x,
\end{aligned}\tag{9.11}$$

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{Q})=&\sum_{r=1}^{s}\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i[i_1\ldots i_s]}\,\cdot\\
&\cdot\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,h_i[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
&+\varepsilon\int\limits_{\Omega}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,h_i\,d^3x.
\end{aligned}\tag{9.12}$$

Далее мы переходим к вариациям g_{00} и b_{00} из (9.3). Здесь

$$\begin{aligned}
&I(b)=\varepsilon\int\limits_{\Omega}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,\eta_{00}[i_1\ldots i_s]\,d^3x,\\
&I(g)=\varepsilon\int\limits_{\Omega}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\Bigr)\,h_{00}[i_1\ldots i_s]\,d^3x.
\end{aligned}\tag{9.13}$$

Интегрируя по частям итеративно первый из интегралов (9.13), мы получим следующую формулу:

$$
\begin{aligned}
I(b)=\sum_{r=1}^{s}\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\,\biggr)\,\eta_{00}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\,\varepsilon\int\limits_{\Omega}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\biggr)\,\eta_{00}\,d^3x.
\end{aligned}
\tag{9.14}
$$

Аналогичным образом, интегрируя по частям итеративно второй из интегралов (9.13), мы получим

$$
\begin{aligned}
I(g)=\sum_{r=1}^{s}\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\cdot\\
\sqrt{\det g}\,\biggr)\,h_{00}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\,\varepsilon\int\limits_{\Omega}(-1)^s\frac{\partial^s}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\sqrt{\det g}\,\biggr)\,h_{00}\,d^3x.
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

Величины η_{ij}, h_{ij}, η_i, h_i, η_{00}, h_{00}, фигурирующие в формулах (9.7), (9.9), (9.11), (9.12), (9.14) и (9.15), должны быть заменены следующими величинами:

$$
\begin{aligned}
&\eta_{ij}=\frac{\partial b_{ij}}{\partial t}, &&\eta_i=\frac{\partial W_i}{\partial t}, &&(9.16)\\
&h_{ij}=2\,c_{\text{gr}}\,b_{ij}, &&h_i=W_i, &&(9.17)\\
&h_{00}=c_{\text{gr}}\,b_{00}, &&\eta_{00}=\frac{\partial b_{00}}{\partial t}. &&(9.18)
\end{aligned}
$$

Формулы (9.16), (9.17) и (9.18) выводятся путём сравнения (8.14) с формулами (8.7), (8.8) и (8.10).

Последний шаг в вычислении компонент вектора $\mathbf{J}$ состоит в том, чтобы собрать интегралы по границе области $\partial\Omega$ из всех формул (9.7), (9.9), (9.11), (9.12), (9.14), (9.15) в одной формуле. Пусть N — максимальный порядок частных производных вида (9.1), (9.2), (9.3), содержащихся в лагранжиане $\mathcal{L}$. Тогда из формул (9.7), (9.9), (9.11), (9.12), (9.14), (9.15) и из формулы (8.17) мы выводим

$$\begin{gathered}
\left(\mathcal{J}^1\,dx^2\wedge dx^3+\mathcal{J}^2\,dx^3\wedge dx^1+\mathcal{J}^3\,dx^1\wedge dx^2\right)\sqrt{\det g}=\\
=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{ij}[i_1\ldots i_s]}\times\\
\times\sqrt{\det g}\biggr)\,\eta_{ij}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{ij}[i_1\ldots i_s]}\times\\
\times\sqrt{\det g}\biggr)\,h_{ij}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_i[i_1\ldots i_s]}\times\\
\times\sqrt{\det g}\biggr)\,\eta_i[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_i[i_1\ldots i_s]}\times\\
\times\sqrt{\det g}\biggr)\,h_i[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+\\
+\sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b_{00}[i_1\ldots i_s]}\times\\
\times\sqrt{\det g}\biggr)\,\eta_{00}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3)\,+
\end{gathered}\tag{9.19}$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\sum_{r=1}^{s}(-1)^{r-1}\,\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}\biggl(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{00}[i_1\ldots i_s]}\,\times$$
$$\times\sqrt{\det g}\,\biggr)\,h_{00}[i_1\ldots i_{s-r}]\,\iota_{i_{s-r+1}}(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3). \tag{9.20}$$

Отметим, что подстановки (9.16), (9.17) и (9.18) следует применить к формуле (9.19), продолженной в (9.20), так же как и к предыдущим формулам (9.4), (9.6), (9.7), (9.8), (9.9), (9.10), (9.11), (9.12), (9.13), (9.14) и (9.15). Отметим также, что операторы частных производных вида

$$\frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{i_{s-r+2}}\ldots\partial x^{i_s}}$$

фактически отсутствуют в тех слагаемых в (9.19) и (9.20), где $r=1$. Это же справедливо и для всех предыдущих формул, где такие операторы используются.

§ 10. Плотность энергии гравитационного поля.

Заметим, что полный лагранжиан L нашей теории в (3.7) есть сумма лагранжиана гравитационного поля L_{gr} в (3.1) и лагранжиана полей материи L_{mat} в (3.2):

$$L=L_{\text{gr}}+L_{\text{mat}}. \tag{10.1}$$

Такое же разделение на два слагаемых имеет место и для плотности полного лагранжиана $\mathcal{L}$, что выражается формулой (3.8), из которой и следует формула (10.1). Поэтому, применив (3.8) к (7.1), (7.2) и (7.3), мы получаем

$$E(\Omega)=E_{\text{gr}}(\Omega)+E_{\text{mat}}(\Omega).\qquad \mathcal{H}=\mathcal{H}_{\text{gr}}+\mathcal{H}_{\text{mat}}. \tag{10.2}$$

Каждое из слагаемых $\mathcal{H}_{\text{gr}}$ и $\mathcal{H}_{\text{mat}}$ в (10.2) задаётся своей формулой, вытекающей из (7.2). В случае плотности энергии гравитационного поля $\mathcal{H}_{\text{gr}}$ эта формула имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{gr}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} b_{ij} + \left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{00}}\right)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} b_{00} +\\ + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta W_i}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}} W_i - \mathcal{L}_{\text{gr}}.\end{aligned} \tag{10.3}$$

Плотность лагранжиана гравитационного поля $\mathcal{L}_{\text{gr}}$ в (10.3) задаётся формулой (3.3), в которой параметр ρ определяется формулой (2.7). Динамические переменные $Q_1, \ldots, Q_n$ и $W_1, \ldots, W_n$, описывающие материю, не входят в формулы (3.3) и (2.7). Из этого следует, что

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta W_i}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{Q}}} = 0. \tag{10.4}$$

Кроме того, мы видим, что величина b_{00} также не входит в формулы (3.3) и (2.7). Отсюда

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta b_{00}}\right)_{\substack{g,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} = 0. \tag{10.5}$$

После применения формул (10.4) и (10.5) к формуле (10.3) она упрощается и принимает вид

$$\mathcal{H}_{\text{gr}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} b_{ij} - \mathcal{L}_{\text{gr}}. \tag{10.6}$$

Явная формула для частной вариационной производной из (10.6) у нас уже имеется. Это формула (4.3). Применив (4.3) к (10.6), мы получаем следующую формулу:

$$\mathcal{H}_{\text{gr}} = \frac{c_{\text{gr}}^4\, g_{00}^{-1/2}}{8\,\pi\,\gamma}\left(\sum_{\substack{k=1\\ q=1}}^{3} b^k_q\, b^q_k - \sum_{\substack{k=1\\ q=1}}^{3} b^k_k\, b^q_q\right) - \mathcal{L}_{\text{gr}}. \tag{10.7}$$

Следующий шаг состоит в подстановке (3.3) в (10.7) и в использовании формулы (2.7) для ρ. Он даёт

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\mathrm{gr}} = \frac{c_{\mathrm{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\,\sqrt{g_{00}}\,\biggl(&g_{00}^{-1}\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3} b_q^k\,b_k^q - g_{00}^{-1}\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3} b_k^k\,b_q^q - \\
&- R + 2\,\Lambda + g_{00}^{-1}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_{kq}\,g_{00} - \\
&- \frac{g_{00}^{-2}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}\biggr).
\end{aligned}
\tag{10.8}
$$

Полученная формула (10.8) и есть явная формула для плотности энергии гравитационного поля. Количество энергии гравитационного поля, заключённое внутри трёхмерной области Ω, даётся интегралом, аналогичном интегралу (7.3):

$$
E_{\mathrm{gr}}(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{H}_{\mathrm{gr}}\,\sqrt{\det g}\;d^3x. \tag{10.9}
$$

Плотность энергии гравитационного поля $\mathcal{H}_{\mathrm{gr}}$ в формуле (10.9) задаётся явной формулой (10.8).

§ 11. Плотность потока энергии гравитационного поля.

Как мы уже отмечали выше, полный лагранжиан нашей теории L разделяется на две части — лагранжиан гравитационного поля $\mathcal{L}_{\mathrm{gr}}$ и лагранжиан полей материи L_{mat}, см. формулу (10.1). То же самое имеет место и для плотности лагранжиана, см. формулу (3.8). Применив (3.8) к формуле (9.19), имеющей продолжение в (9.20), мы заключаем, что вектор плотности потока $\mathbf{J}$ тоже разделяется на две части:

$$
\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathrm{gr}} + \mathbf{J}_{\mathrm{mat}}. \tag{11.1}
$$

Первое слагаемое в формуле (11.1) можно вычислить в явной форме. Для этой цели рассмотрим интеграл (8.13), заменив в нём полную плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}_{\text{gr}}$:

$$\hat{L}_{\text{gr}}(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \hat{\mathcal{L}}_{\text{gr}} \sqrt{\det \hat{g}}\, d^3x. \tag{11.2}$$

Из (11.2) с использованием формул (8.7), (8.8) и (8.10) может быть выведена формула, аналогичная формуле (8.17). При это надо учесть соотношения (10.4) и (10.5). Помимо (10.4) и (10.5) имеет место ещё одно соотношение

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta Q_i}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{W}}} = 0. \tag{11.3}$$

Соотношение (11.3) вытекает из того, что формулы (3.3) и (2.7) не содержат $Q_1, \ldots, Q_n$. С учётом сказанного получаем

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{\text{gr}}(\Omega) = L_{\text{gr}}(\Omega) + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta b_{ij}}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} \frac{\partial b_{ij}}{\partial t}\,\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\, d^3x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{ij}}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} 2\, c_{\text{gr}}\, b_{ij}\,\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\, d^3x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\delta\mathcal{L}_{\text{gr}}}{\delta g_{00}}\right)_{\substack{b,\mathbf{g},\mathbf{b}\\ \mathbf{Q},\mathbf{W}}} c_{\text{gr}}\, b_{00}\,\cdot\\
\cdot\sqrt{\det g}\, d^3x + \varepsilon \int\limits_{\partial\,\Omega} \bigl(\mathcal{J}^1_{\text{gr}}\, dx^2\wedge dx^3 +\\
+ \mathcal{J}^2_{\text{gr}}\, dx^3\wedge dx^1 + \mathcal{J}^3_{\text{gr}}\, dx^1\wedge dx^2\bigr)\sqrt{\det g} + \ldots\,.
\end{aligned} \tag{11.4}$$

Из вывода формулы (9.19), имеющей продолжение в (9.20), мы знаем, что только слагаемые с частными производными по пространственным переменным x^1, x^2, x^3 в плотности лагранжиана приводят к интегралам по границе области $\partial\,\Omega$. Слагаемое с $2\,\Lambda$ в (3.3) не содержит таких производных. Слагаемые с $b^k_q\,b^q_k$ и $b^k_k\,b^q_q$ в (2.7) также не содержат производных по пространственным переменным. Остаётся три слагаемых

1) слагаемое с $\nabla_{kq}\,g_{00}$ в (2.7);
2) слагаемое с $\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}$ в (2.7);
3) слагаемое с R в (2.7).

Начнём со слагаемого с $\nabla_{kq}\,g_{00}$. Сама эта вторая ковариантная производная пишется с использованием компонент метрической связности Γ^s_{kq} трёхмерной метрики g_{ij}:

$$\nabla_{kq}\,g_{00}=\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^k\,\partial x^q}-\sum_{s=1}^{3}\Gamma^s_{kq}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^s}. \tag{11.5}$$

Применив вариацию метрики g_{ij} из (8.14) к Γ^i_{kq} в (8.3), мы получим следующее выражение:

$$\hat{\Gamma}^s_{kq}=\Gamma^s_{kq}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{r=1}^{3}g^{sr}\,\left(\nabla_k\,h_{rq}+\nabla_q\,h_{kr}-\nabla_r\,h_{kq}\right)+\ldots. \tag{11.6}$$

Помимо вариации метрики надо учесть вариацию самой скалярной функции g_{00} в (8.14). Это приводит к формуле

$$\begin{gathered}\hat{\nabla}_{kq}\,\hat{g}_{00}=\nabla_{kq}\,g_{00}+\nabla_{kq}\,h_{00}-\\-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}g^{sr}\bigl(\nabla_k\,h_{rq}+\nabla_q\,h_{kr}-\nabla_r\,h_{kq}\bigr)\,\nabla_s\,g_{00}+\ldots.\end{gathered} \tag{11.7}$$

Формула (11.7) выведена с использованием (11.6). В силу (11.7) слагаемое со второй ковариантной производной (11.5) даёт вклад в левую часть формулы (11.4), выражаемый следующими двумя интегралами:

$$L_1=-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\nabla_{kq}\,h_{00}\,\sqrt{\det g}\,d^3x. \tag{11.8}$$

$$L_2=\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\frac{g_{00}^{-1/2}}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}g^{sr}\,g^{kq}\left(\nabla_k\,h_{rq}+\right.$$
$$\left.+\,\nabla_q\,h_{kr}-\nabla_r\,h_{kq}\right)\nabla_s\,g_{00}\,\sqrt{\det g}\;d^3x,\tag{11.9}$$

Перейдём к слагаемому с $\nabla_k\,g_{00}\,\nabla_q\,g_{00}$ в (2.7). Ковариантные производные в этом слагаемом не используют компонент связности Γ^s_{kq}. Поэтому это слагаемое даёт вклад в левую часть формулы (11.4), выражаемый интегралом

$$L_3=\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}g_{00}^{-3/2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\nabla_k\,g_{00}\,\cdot$$
$$\cdot\,\nabla_q\,h_{00}\,\sqrt{\det g}\;d^3x.\tag{11.10}$$

Слагаемое со скалярной кривизной R в (2.7) является наиболее сложным для вычислений. Применив вариацию метрики g_{ij} из (8.14) к R, мы получаем формулу (4.34), в которой используются обозначения (4.35) и (4.30). В силу (4.34) слагаемое с скалярной кривизной R в (2.7) даёт вклад в левую часть формулы (8.2), выражаемый интегралом

$$L_4=\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}g_{00}^{1/2}\sum_{k=1}^{3}\nabla_k Z^k\,\sqrt{\det g}\;d^3x.\tag{11.11}$$

Вернёмся к интегралу (11.9). Этот интеграл можно упростить и записать как сумму из двух интегралов:

$$L_2=\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}2\,\nabla_k\,h^{sk}\,\nabla_s\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,\sqrt{\det g}\;d^3x\,-$$
$$-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}g^{sr}\,\nabla_r\,h^k_k\,\nabla_s\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,\sqrt{\det g}\;d^3x.\tag{11.12}$$

Применив интегрирование по частям к интегралам (11.12), мы получаем следующее соотношение:

$$
\begin{gathered}
L_2=\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}2\,h^{sk}\,\nabla_s\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,n_k\,dS\,-\\
-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}2\,h^{sk}\,\nabla_{sk}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\sqrt{\det g}\,d^3x\,-\\
-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}g^{sr}\;h^k_k\,\nabla_s\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,n_r\,dS\,+\\
+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}g^{sr}\,h^k_k\,\nabla_{sr}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\sqrt{\det g}\,d^3x.
\end{gathered}\tag{11.13}
$$

Здесь в (11.13) через dS мы обозначили элемент площади на границе $\partial\,\Omega$ трёхмерной области Ω, а n_k и n_r — это ковариантные компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ на границе $\partial\,\Omega$, направленного наружу от области Ω.

Переходя к интегралу (11.8), мы проинтегрируем его по частям дважды. В результате этого получим

$$
\begin{gathered}
L_1=-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}g_{00}^{-1/2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\nabla_q\,h_{00}\,n_k\,dS\,+\\
+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\nabla_k\bigl(g_{00}^{-1/2}\bigr)\,h_{00}\,n_q\,dS\,-\\
-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\nabla_{kq}\bigl(g_{00}^{-1/2}\bigr)\,h_{00}\sqrt{\det g}\,d^3x.
\end{gathered}\tag{11.14}
$$

В (11.14), так же как и в (11.13), через dS мы обозначаем элемент площади на границе, а n_k и n_q — это ковариантные компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ на $\partial\,\Omega$.

Теперь перейдём к интегралу (11.10). Этот интеграл можно записать следующим образом:

$$L_3 = -\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_k\bigl(\,g_{00}^{-1/2}\bigr)\cdot \\ \cdot\nabla_q\,h_{00}\,\sqrt{\det g}\;d^3x. \tag{11.15}$$

Интегрируя по частям (11.15), мы выводим формулу

$$L_3 = -\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_k\bigl(\,g_{00}^{-1/2}\bigr)\,h_{00}\,n_q\,dS\,+ \\ +\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g^{kq}\,\nabla_{kq}\bigl(\,g_{00}^{-1/2}\bigr)\,h_{00}\,\sqrt{\det g}\;d^3x. \tag{11.16}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы преобразовать интеграл (11.11). Интегрируя по частям, мы получаем

$$L_4 = \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega} g_{00}^{1/2}\sum_{k=1}^{3} Z^k\,n_k\,dS\,- \\ -\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\nabla_k\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,Z^k\,\sqrt{\det g}\;d^3x. \tag{11.17}$$

Из формул (4.35) и (4.30) вытекает выражение (4.38) для Z^k Мы применим формулу (4.38) ко второму интегралу в (11.17). В результате этого получится следующая формула:

$$L_4 = \frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega} g_{00}^{1/2}\sum_{k=1}^{3} Z^k\,n_k\,dS\,-$$

$$-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\nabla_k\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,\nabla_q\,h^{kq}\sqrt{\det g}\,d^3x+$$
$$+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\nabla_k\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,g^{kq}\,\nabla_q\,h_r^r\sqrt{\det g}\,d^3x.$$

Далее мы применим интегрирование по частям ко второму и третьему интегралам в полученной формуле. Это даёт

$$\begin{aligned}L_4=\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\biggl(\,&\int\limits_{\partial\,\Omega}g_{00}^{1/2}\sum_{k=1}^{3}Z^k\,n_k\,dS-\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{\substack{k=1\\q=1}}^{3}\nabla_k\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,\cdot\\&\cdot\,h^{kq}\,n_q\,dS+\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\nabla_{kq}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,h^{kq}\sqrt{\det g}\,d^3x\biggr)+\\&+\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\nabla_k\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,g^{kq}\,h_r^r\,n_q\,dS-\\&-\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\nabla_{kq}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,g^{kq}\,h_r^r\sqrt{\det g}\,d^3x.\end{aligned}\tag{11.18}$$

Как и в предыдущих формулах, через dS в (11.18) мы обозначаем элемент площади на границе $\partial\,\Omega$ трёхмерной области Ω, а n_k и n_q — это ковариантные компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ на границе области $\partial\,\Omega$, направленного наружу от области Ω.

Теперь вспомним, что поверхностный интеграл второго рода в (11.4) можно преобразовать в интеграл первого рода:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\partial\,\Omega}\bigl(\mathcal{J}_{\text{gr}}^1\,dx^2\wedge dx^3+\mathcal{J}_{\text{gr}}^2\,dx^3\wedge dx^1+\\&+\mathcal{J}_{\text{gr}}^3\,dx^1\wedge dx^2\bigr)\sqrt{\det g}=\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\mathcal{J}^k\,n_k\,dS.\end{aligned}\tag{11.19}$$

В силу (11.19) мы можем собрать вместе все интегралы по границе области $\partial\,\Omega$ из (11.13), (11.14), (11.16) и (11.18) и сравнить их сумму с правой частью (11.19). Это даёт

$$\begin{gathered}\frac{c_{\text{gr}}^4\,\varepsilon}{16\,\pi\,\gamma}\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\biggl(\sum_{s=1}^{3}2\,h^{sk}\,\nabla_{\!s}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)-\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}g^{sk}\,\cdot\\ \cdot\,h^q_q\,\nabla_{\!s}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)-\sum_{q=1}^{3}g_{00}^{-1/2}\,g^{kq}\,\nabla_{\!q}\,h_{00}+\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\cdot\\ \cdot\,\nabla_{\!q}\bigl(g_{00}^{-1/2}\bigr)\,h_{00}-\sum_{q=1}^{3}g^{kq}\,\nabla_{\!q}\bigl(\,g_{00}^{-1/2}\bigr)\,h_{00}+g_{00}^{1/2}\,\cdot\\ \cdot\,Z^k-\sum_{q=1}^{3}\nabla_{\!q}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,h^{kq}+\sum_{q=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\nabla_{\!q}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)\,g^{kq}\,\cdot\\ \cdot\,h^r_r\biggr)=\varepsilon\int\limits_{\partial\,\Omega}\sum_{k=1}^{3}\mathcal{J}^{\,k}_{\text{gr}}\,n_k\,dS.\end{gathered}\tag{11.20}$$

Применив (4.38), из (11.20) мы определяем компоненты $\mathbf{J}_{\text{gr}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\,k}_{\text{gr}}=\frac{c_{\text{gr}}^4}{16\,\pi\,\gamma}\biggl(&\sum_{i=1}^{3}g_{00}^{1/2}\,\nabla_{\!i}\,h^{ik}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}g_{00}^{1/2}\,g^{ik}\,\nabla_{\!i}\,h^q_q\,+\\ &+\sum_{i=1}^{3}h^{ik}\,\nabla_{\!i}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)-\sum_{i=1}^{3}g_{00}^{-1/2}\,g^{ik}\,\nabla_{\!i}\,h_{00}\biggr).\end{aligned}\tag{11.21}$$

Окончательная формула для $\mathcal{J}^{\,k}_{\text{gr}}$ получается из (11.21) после применения формул (9.17) и (9.18). Она имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{\,k}_{\text{gr}}=\frac{c_{\text{gr}}^5}{16\,\pi\,\gamma}\biggl(&\sum_{i=1}^{3}2\,g_{00}^{1/2}\,\nabla_{\!i}\,b^{ik}-\sum_{i=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}2\,g_{00}^{1/2}\,g^{ik}\,\cdot\\ &\cdot\,\nabla_{\!i}\,b^q_q+\sum_{i=1}^{3}2\,b^{ik}\,\nabla_{\!i}\bigl(g_{00}^{1/2}\bigr)-\sum_{i=1}^{3}g_{00}^{-1/2}\,g^{ik}\,\nabla_{\!i}\,b_{00}\biggr).\end{aligned}\tag{11.22}$$

В общем случае поток энергии гравитационного поля через поверхность S задаётся формулой

$$E(S) = \int\limits_S \sum_{k=1}^{3} \mathcal{J}^k_{\mathrm{gr}}\, n_k\, dS. \tag{11.23}$$

Компоненты $\mathcal{J}^k_{\mathrm{gr}}$ вектора $\mathbf{J}_{\mathrm{gr}}$ в (11.23) определяются формулой (11.22).

Теорема 8.1 определяет закон сохранения полной энергии гравитационного поля и полей материи. Отдельного закона сохранения энергии для гравитационного поля нет. Но тем не менее, в формуле для общей плотности энергии (7.2) можно выделить часть (10.8), отвечающую за гравитационное поле. Точно так же из вектора потока полной энергии $\mathbf{J}$, определяемого формулой (9.19), имеющей продолжение (9.20), можно выделить часть $\mathbf{J}_{\mathrm{gr}}$, которая определяется формулой (11.22) и отвечает за поток энергии гравитационного поля.

Л. Д. Фаддеев в [61] указывает на некоторые проблемы с определением энергии гравитационного в теории относительности Эйнштейна. В нашей новой теории, как мы можем видеть в формулах (10.8) и (11.22), никаких проблем с энергией гравитационного поля нет.

ГЛАВА IV

ТОЧЕЧНЫЕ ЧАСТИЦЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ.

§ 1. Действие для точечных частиц.

Точечными частицами или точечными массами в механике принято считать частицы, размер которых пренебрежимо мал по сравнению с дистанциями их перемещений и внутренняя структура и пространственная ориентация которых не влияет на их движение. Расположение точечной частицы в пространстве характеризуется тремя координатами x^1, x^2, x^3. Движение точечной частицы характеризуется тем, что её координаты x^1, x^2, x^3 зависят от времени:

$$x^1(t), \qquad\qquad x^2(t), \qquad\qquad x^3(t). \tag{1.1}$$

В нашей теории имеются выделенные системы координат, которые называются сопутствующими координатами, см. § 3 в первой главе. В дальнейшем под x^1, x^2, x^3 в (1.1) и всюду далее мы понимаем координаты в одной из таких сопутствующих систем координат. Кроме этого в нашей теории имеется выделенный способ отсчёта времени, связанный с расслоением 3D-бран в пространстве-времени. Он называется мембранным временем, см. § 5 в первой главе. Под временем t в (1.1) и всюду далее мы понимаем один из возможных выборов такого мембранного времени.

Производные по времени от координат точечной частицы в (1.1) являются компонентами вектора. Этот вектор $\mathbf{v}$ называется вектором скорости частицы:

$$v^i = \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}, \text{ где } i = 1,\,2,\,3. \tag{1.2}$$

Вектор ускорения **a** точечной частицы получается из вектора скорости **v** этой частицы через процедуру ковариантного дифференцирования по времени:

$$a^i = \nabla_t v^i = \dot{v}^i + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \Gamma^i_{jk}\, v^i\, v^k, \text{ где } i = 1,\,2,\,3. \tag{1.3}$$

Через Γ^i_{jk} в (1.3) обозначены компоненты метрической связности для трёхмерной метрики g_{ij}, см. (2.7) во второй главе. Они определяются формулой (4.1) из второй главы.

Длина вектора скорости точечной частицы **v** с компонентами (1.2) определяется метрикой g_{ij}:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij}\, v^i\, v^j}\,. \tag{1.4}$$

Теперь, с учётом (1.4), мы готовы к тому, чтобы написать интеграл действия для точечных частиц. При записи интеграла действия мы будем различать частицы барионной светлой материи и частицы небарионной тёмной материи:

$$S_{\text{br}} = -\int m\, c_{\text{br}}^2 \sqrt{g_{00} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{br}}^2}}\, dt. \tag{1.5}$$

$$S_{\text{nb}} = -\int m\, c_{\text{nb}}^2 \sqrt{g_{00} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}\, dt. \tag{1.6}$$

Интегралы (1.5) и (1.6) отличаются лишь константами c_{br} и c_{nb} в них. Это две из четырёх констант скорости, которые мы рассмотрели в (1.2) во второй главе. В дальнейшем мы ограничим наше рассмотрение случаем небарионной материи (1.6). Полученные при этом формулы можно будет легко переделать на случай барионной материи простой заменой c_{nb} на c_{br} в них.

Интегралы действия в (1.5) и (1.6) по сути являются интегралами по траектории частицы, которые определяются функциями $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$ в (1.1). Величина g_{00} в этих формулах — это скалярная функция из (2.9) во второй главе, а константа m — это масса частицы, которая также называется массой покоя частицы.

§ 2. Уравнения движения небарионных частиц в гравитационном поле.

Функция, стоящая в интеграле действия для точечной частицы называется её лагранжианом:

$$S_{\text{nb}} = \int L_{\text{nb}}\,dt. \tag{2.1}$$

Сравнивая (2.1) с (1.6), мы получаем

$$L_{\text{nb}} = -m\,c_{\text{nb}}^2 \sqrt{g_{00} - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}. \tag{2.2}$$

Применение принципа наименьшего действия[1] к интегралу (2.1) приводит к уравнения Эйлера-Лагранжа

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L_{\text{nb}}}{\delta v^i}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{x}}} + \left(\frac{\delta L_{\text{nb}}}{\delta x^i}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{v}}} = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку лагранжиан (2.2) не является интегралом, а является функцией, частные вариационные производные сводятся

[1] Принцип наименьшего действия правильнее было бы называть принципом стационарного действия, поскольку минимальность действия по факту никогда не требуется.

к обычным частным производным, а сами уравнения Эйлера-Лагранжа (2.3) записываются в виде

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial v^i}\right)+\frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial x^i}=0. \tag{2.4}$$

Частные производные в (2.4) легко вычисляются исходя из (2.2). Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial v^i}=\frac{m\,v_i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,,\\ &\frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial x^i}=\frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\frac{m}{2}\,\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\,v^r\,v^s-c_{\text{nb}}^2\,\frac{m}{2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Функция g_{00} является скалярной функцией. Поэтому её частная производная в (2.5) равна её ковариантной производрой:

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}=\nabla_i\,g_{00}. \tag{2.6}$$

Известно, что $\nabla_i\,g_{rs}=0$ и известно также, что эта ковариантная производная вычисляется по следующей формуле (см. § 7 в главе III из книги [53]):

$$\nabla_i\,g_{rs}=\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}-\sum_{q=1}^{3}\Gamma^q_{ir}\,g_{qs}-\sum_{q=1}^{3}\Gamma^q_{is}\,g_{rq}. \tag{2.7}$$

Из $\nabla_i\,g_{rs}=0$ и из формулы (2.7) мы выводим

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\,v^r\,v^s=\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}2\,\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s. \tag{2.8}$$

Здесь Γ^q_{is} — это компоненты метрической связности, определяемые трёхмерной метрикой g_{ij}. В силу (2.6) и (2.8) формулы (2.5) записываются так:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial v^i}=\frac{m\,v_i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,,\\
\frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial x^i}=\frac{\displaystyle\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}m\,\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s-\frac{m\,c_{\text{nb}}^2}{2}\,\nabla_i\,g_{00}}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Применив (2.9) к уравнениям (2.4), мы выводим

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v_i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\right)=\\
=\frac{\displaystyle\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}m\,\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s-\frac{m\,c_{\text{nb}}^2}{2}\,\nabla_i\,g_{00}}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

Производная по времени в левой части уравнения (2.10) преобразуется следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v_i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\right)=\frac{m\,\dot v_i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,+\\
+\frac{m\,v_i}{\left(\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}\right)^3}\,\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}\right)-\dot g_{00}-\sum_{s=1}^{3}v^s\,\nabla_s\,g_{00}\right).
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

Скомбинировав (2.10) и (2.11), мы выводим дифференциальные уравнения для v_i:

$$\begin{gathered}
\frac{m\,\dot{v}_i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}+\frac{m\,v_i}{\left(\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}\,\right)^3}\,\frac{1}{2}\Biggl(\frac{d}{dt}\Biggl(\frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}\Biggr)-\dot{g}_{00}-\\
-\sum_{s=1}^{3}v^s\,\nabla_s\,g_{00}\Biggr)=\frac{\displaystyle\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}m\,\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s-\frac{m\,c_{\text{nb}}^2}{2}\,\nabla_i\,g_{00}}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,.
\end{gathered}\tag{2.12}$$

Уравнение (2.11) выведено с использованием (2.6). Помимо (2.6) нам потребуется соотношение (6.1) в третьей главе. Второе слагаемое в левой части уравнения (2.12) содержит производную по времени от $|\mathbf{v}|^2$. Мы вычислим эту производную следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{d(|\mathbf{v}|^2)}{dt}=\frac{d}{dt}\Biggl(\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}g_{rs}\,v^r\,v^s\Biggr)=\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\frac{d(\,g_{rs}\,v^r)}{dt}\,v^s+\\
+\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\frac{d(\,g_{rs}\,v^s)}{dt}\,v^r-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\frac{dg_{rs}}{dt}\,v^s\,v^r=\\
=\sum_{s=1}^{3}2\,\dot{v}_s\,v^s-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial g_{rs}}{\partial t}\,v^s\,v^r-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i}\,\dot{x}^i\;v^s\,v^r.
\end{gathered}\tag{2.13}$$

Мы преобразуем (2.13) используя формулу (6.1) из третьей главы, а также формулы (1.2) и (2.8). Это даёт

$$\begin{gathered}
\frac{d(|\mathbf{v}|^2)}{dt}=-\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}2\,\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s\,v^i+\\
+\sum_{s=1}^{3}2\,\dot{v}_s\,v^s-\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}2\,c_{\text{gr}}\,b_{rs}\,v^s\,v^r.
\end{gathered}\tag{2.14}$$

Далее умножим (2.12) на v^i и просуммируем по i от 1 до 3:

$$\begin{gathered}
\frac{m\sum\limits_{i=1}^{3}\dot{v}_i\,v^i}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}+\frac{m\,|\mathbf{v}|^2}{\left(\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}\,\right)^3}\,\cdot\\
\cdot\,\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}\right)-\dot{g}_{00}-\sum_{s=1}^{3}v^s\,\nabla_s\,g_{00}\right)=\\
=\frac{\sum\limits_{q=1}^{3}\sum\limits_{s=1}^{3}\sum\limits_{i=1}^{3}m\,\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s\,v^i-\dfrac{m\,c_{\text{nb}}^2}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}v^i\,\nabla_i\,g_{00}}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,.
\end{gathered}\tag{2.15}$$

Затем мы применим формулу (2.14) к производной по времени от $|\mathbf{v}|^2$ в формуле (2.15). В результате этого равенство (2.15) упростится и сведётся к следующему равенству:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{3}\dot{v}_i\,v^i=\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\Gamma^q_{is}\,v_q\,v^s\,v^i+\frac{c_{\text{gr}}\,|\mathbf{v}|^2}{g_{00}\,c_{\text{nb}}^2}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}b_{rs}\,\cdot\\
\cdot\,v^s\,v^r+\frac{\dot{g}_{00}\,|\mathbf{v}|^2}{2\,g_{00}}-\frac{c_{\text{nb}}^2}{2}\sum_{i=1}^{3}v^i\,\nabla_i\,g_{00}+\frac{|\mathbf{v}^2|}{g_{00}}\sum_{i=1}^{3}v^i\,\nabla_i\,g_{00}.
\end{gathered}\tag{2.16}$$

Теперь мы подставим (2.16) вместо второго слагаемого в (2.14). В результате этого получим

$$\begin{gathered}
\frac{d(|\mathbf{v}|^2)}{dt}=-\frac{2\,c_{\text{gr}}}{g_{00}}\left(g_{00}-\frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}\right)\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}b_{rs}\,v^s\,v^r+\\
+\frac{\dot{g}_{00}\,|\mathbf{v}|^2}{g_{00}}-c_{\text{nb}}^2\sum_{i=1}^{3}v^i\,\nabla_i\,g_{00}+\frac{2\,|\mathbf{v}|^2}{g_{00}}\sum_{i=1}^{3}v^i\,\nabla_i\,g_{00}.
\end{gathered}\tag{2.17}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы подставить (2.17) в уравнение (2.12). Это даёт

$$\begin{gathered}\dot{v}_i-\sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\Gamma^q_{is}\,v_q\,\dot{x}^s=-\frac{c_{\text{nb}}^2}{2}\,\nabla_i\,g_{00}+\\+v_i\left(\sum_{s=1}^{3}\frac{v^s\,\nabla_s\,g_{00}}{g_{00}}+\frac{\dot{g}_{00}}{2\,g_{00}}+\frac{c_{\text{gr}}}{c_{\text{nb}}^2\,g_{00}}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}b_{rs}\,v^s\,v^r\right).\end{gathered}\tag{2.18}$$

Левая часть уравнения (2.18) подходит под определение ковариантной производной ковекторного поля по параметру t вдоль параметрической кривой, см. (8.10) в § 8 из главы III в книге [53]). Поэтому мы можем записать (2.18) как

$$\begin{gathered}\nabla_t v_i=-\frac{c_{\text{nb}}^2}{2}\,\nabla_i\,g_{00}+v_i\left(\sum_{s=1}^{3}\frac{v^s\,\nabla_s\,g_{00}}{g_{00}}+\right.\\\left.+\frac{\dot{g}_{00}}{2\,g_{00}}+\frac{c_{\text{gr}}}{c_{\text{nb}}^2\,g_{00}}\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}b_{rs}\,v^s\,v^r\right).\end{gathered}\tag{2.19}$$

Равенства (1.2) можно записать как дифференциальные уравнения для координат частицы:

$$\dot{x}^i=v^i.\tag{2.20}$$

Уравнения (2.19), дополненные уравнениями (2.20), составляют полную систему дифференциальных уравнений, описывающих движение небарионной частицы в гравитационном поле, заданном трёхмерной метрикой g_{ij} и скалярной функцией g_{00}. Уравнения не содержат массы частицы m. Это обстоятельство интерпретируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Инертная и пассивная гравитационная массы небарионной массивной частицы равны друг другу.*

Определения инертной, а также активной и пассивной гравитационных масс даны в [62].

§ 3. Энергия и импульс точечных небарионных частиц.

Преобразование Лежандра для точечной небарионной частицы определяется её лагранжианом:

$$p_i = \left(\frac{\delta L_{\text{nb}}}{\delta v^i}\right)_{\substack{g,b,\mathbf{g}\\ \mathbf{b},\mathbf{x}}}, \tag{3.1}$$

Лагранжиан (2.2) не является интегралом, а является функцией. Поэтому вариационная частная производная в (3.1) заменяется на обычную частную производную:

$$p_i = \frac{\partial L_{\text{nb}}}{\partial v^i} \tag{3.2}$$

Частная производная из (3.2) была уже фактически посчитана в (2.5). Используя первую формулу из (2.5), получим

$$p_i = \frac{m\,v_i}{\sqrt{g_{00} - \dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,. \tag{3.3}$$

Величины p_i в (3.3) являются компонентами ковектора $\mathbf{p}$. Этот ковектор с компонентами (3.3) называется ковектором импульса небарионной частицы.

Вернёмся к уравнениям (2.10). Используя компоненты ковектора импульса $\mathbf{p}$ из (3.3) и принимая во внимание уравнения (1.2), мы можем записать уравнения (2.10) так:

$$\dot{p}_i - \sum_{q=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\Gamma^q_{is}\,p_q\,\dot{x}^s = -\frac{m\,c_{\text{nb}}^2\,\nabla_i\,g_{00}}{2\sqrt{g_{00} - \dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,. \tag{3.4}$$

Левая часть уравнений (3.4) подходит под определение ковариантной производной ковекторного поля по параметру t

вдоль параметрической кривой, см. (8.10) в § 8 из главы III в книге [53]). Поэтому мы можем записать (3.4) как

$$\nabla_t p_i = -\frac{m\,c_{\mathrm{nb}}^2\,\nabla_i\,g_{00}}{2\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\mathrm{nb}}^2}}}\,. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.5), дополненные уравнениями (2.20) составляют полную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение небарионной частицы в гравитационном поле, заданном трёхмерной метрикой g_{ij} и скалярной функцией g_{00}. Правые части уравнений (3.5) интерпретируются как компоненты ковектора силы $\mathbf{F}$, которая действует на небарионную частицу со стороны гравитационного поля:

$$F_i = -\frac{m\,c_{\mathrm{nb}}^2\,\nabla_i\,g_{00}}{2\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\mathrm{nb}}^2}}}\,. \tag{3.6}$$

Функция энергии для небарионной частицы записывается через компоненты её ковектора импульса $\mathbf{p}$ и через компоненты её вектора скорости $\mathbf{v}$:

$$E_{\mathrm{nb}} = \sum_{i=1}^{3} p_i\,v^i - L_{\mathrm{nb}}. \tag{3.7}$$

Применив (3.3) и (2.2) к (3.7), мы выводим

$$E_{\mathrm{nb}} = \frac{m\,|\mathbf{v}|^2}{\sqrt{g_{00}-\dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\mathrm{nb}}^2}}} + m\,c_{\mathrm{nb}}^2\sqrt{g_{00}-\frac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\mathrm{nb}}^2}}. \tag{3.8}$$

Формулу (3.8) для энергии небарионной частицы можно упростить приведением к общему знаменателю и группировкой подобных слагаемых в числителе. После упрощения она записывается следующим образом:

$$E_{\text{nb}} = \frac{m\,c_{\text{nb}}^2}{\sqrt{g_{00} - \dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,. \tag{3.9}$$

Величина g_{00} может быть сделана равной единице в любой отдельно взятой точке пространства, но в общем случае не повсеместно. Для этого надо выполнить замену мембранного времени по формуле (2.10) из второй главы. После этого формула (3.9) принимает вид

$$E_{\text{nb}} = \frac{m\,c_{\text{nb}}^2}{\sqrt{1 - \dfrac{|\mathbf{v}|^2}{c_{\text{nb}}^2}}}\,. \tag{3.10}$$

В силу (3.10) константа c_{nb} интерпретируется как верхняя граница для скорости небарионных частиц.

§ 4. Круговое вращение небарионных частиц вокруг чёрной дыры Шварцшильда.

В § 8 второй главы выше мы изучили чёрные дыры Шварцшильда в рамках нашей новой теории гравитации. Для этого использовались пространственные координаты

$$x^1 = \rho, \qquad\qquad x^2 = \theta, \qquad\qquad x^3 = \phi \tag{4.1}$$

и переменная времени t, связанная с сопутствующим наблюдателем, отнесённым в бесконечность от чёрной дыры. Гравитационное поле чёрной дыры Шварцшильда задаётся скалярным полем g_{00} и трёхмерной диагональной метрикой g_{ij}, которые определяются формулами (8.7) и (8.6) из второй главы. Ненулевые компоненты трёхмерной метрической связности задаются формулами (8.8) из второй главы. Функция g_{00} и трёхмерная метрика g_{ij} в случае чёрной дыры Шварцшильда являются стационарными. Они не зависят от времени. Поэтому мы имеем следующие соотношения:

$$\dot{g}_{00} = 0, \qquad\qquad b_{ij} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{4.2}$$

Пусть небарионная частица массы m вращается вокруг чёрной дыры в её экваториальной плоскости с угловой скоростью вращения ω. Тогда её вращение в координатах (4.1) задаётся следующими формулами:

$$\rho(t) = \rho = \text{const}, \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{2} = \text{const}, \qquad \phi(t) = \omega\, t. \tag{4.3}$$

Продифференцировав по времени (4.3), мы найдём компоненты вектора скорости небарионной частицы:

$$v^1 = 0, \qquad\qquad v^2 = 0, \qquad\qquad v^3 = \omega. \tag{4.4}$$

Компоненты ковектора скорости выводятся из (4.4) при помощи стандартной процедуры опускания интекса:

$$v_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}\, v^k. \tag{4.5}$$

Применив формулы (8.6) из второй главы и формулы (4.4) к (4.5) и приняв во внимание (4.3), мы получим

$$v_1 = 0, \qquad\qquad v_2 = 0, \qquad\qquad v_3 = \rho^2\, \omega. \tag{4.6}$$

Компоненты ковектора ускорения определяются так:

$$a_i = \nabla_t v_i = \dot{v}_i - \sum_{q=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \Gamma^q_{is}\, v_q\, v^s. \tag{4.7}$$

Применив (4.4) и (4.6) к (4.7) и приняв во внимание формулы (8.8) из второй главы, мы находим

$$a_1 = -\rho\,\omega^2, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = 0. \tag{4.8}$$

Теперь мы можем применить дифференциальные уравнения (2.19), описывающие динамику частицы. Вычислим компоненты градиента скалярного поля g_{00} в них:

$$\nabla_1\, g_{00} = \frac{r_{\text{gr}}}{\rho^2} \qquad \nabla_2\, g_{00} = 0, \qquad \nabla_3\, g_{00} = 0. \tag{4.9}$$

Используя (4.4) и (4.9), мы выводим

$$\sum_{s=1}^{3} v^s\,\nabla_s\, g_{00} = 0. \tag{4.10}$$

В силу (4.2), (4.10) и (4.7) уравнение (2.19) сводится к

$$a_i = -\frac{c_{\text{nb}}^2}{2}\,\nabla_i\, g_{00}. \tag{4.11}$$

Применив (4.8) и (4.9) к (4.11), мы выводим равенство

$$-\rho\,\omega^2 = -\frac{c_{\text{nb}}^2\, r_{\text{gr}}}{2\,\rho^2}. \tag{4.12}$$

Гравитационный радиус для барионной чёрной дыры Шварцшильда с массой M задаётся формулой

$$r_{\text{gr}} = \frac{2\,\gamma\, M}{c_{\text{gr}}^2}. \tag{4.13}$$

Формула (4.13) содержится в § 100 из главы XII в книге [2] и в [63]. Подставив (4.13) в (4.12), мы выводим

$$\rho\,\omega^2 = \frac{c_{\text{nb}}^2\,\gamma\, M}{c_{\text{gr}}^2\,\rho^2}. \tag{4.14}$$

Несмотря на наличие знаменателя в формуле для силы (3.6), формула (4.14) совпадает с формулой из классической ньютоновской теории гравитации с точностью до множителя

$$k_{\rm nb} = \frac{c_{\rm nb}^2}{c_{\rm gr}^2}. \tag{4.15}$$

Если заменить небарионную частицу на барионную, то $c_{\rm nb}$ в (4.15) заменится на $c_{\rm nb}$. Соответствующий этому случаю множитель должен равняться единице, поскольку для барионной материи в классической ньютоновской теории гравитации нет никакой скорости света и её аналогов:

$$k_{\rm br} = \frac{c_{\rm br}^2}{c_{\rm gr}^2} = 1. \tag{4.16}$$

Из (4.16) вытекает равенство

$$c_{\rm br} = c_{\rm gr}, \tag{4.17}$$

а приведённые выше рассуждения служат доказательством полученного равенства (4.17).

§ 5. Супербрадионы Луиса Грнзалеза Местреса.

Массивные небарионные частицы с предельной скоростью, отличной от скорости света, рассматривал Луис Грнзалез Местрес в [64]. При этом он считал, что

$$c_{\rm nb} > c_{\rm el}, \tag{5.1}$$

В силу неравенства (5.1) Луис Грнзалез Местрес в [65] назвал придуманные им частицы супербрадионами. В [66] и [67] он написал для энергии супербрадионов формулу вида (3.10) и предположил, что супербрадионы можно найти в составе космических лучей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Пространство-время*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория поля,* Теоретическая физика, том II, Изд-во «Наука», Москва, 1988.
3. Шарипов Р. А., *Классическая электродинамика и теория относительности*, БашГУ, Уфа, 1997; см. также arXiv:physics/0311011.
4. *Парадокс Андромеды, аргумент Ритдэйка-Патнэма*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
5. Penrose R., *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1989.
6. Шарипов Р. А., *Модель вселенной как 3D-браны, новая неэйнштейновская теория гравитации.* доклад от 22.10.2023 на собрании Zoom-клуба однокурсников Андрея Голова ФОПФ-1977, Youtube video https://youtu.be/Am5vwefbOdU?t=2177.
7. Rietdijk C. W., *A Rigorous proof of determinism derived from the special theory of relativity*, Philosophy of science **33** (1966), № 4, 341–344.
8. Putnam H., *Time and physical geometry*, Journ. of philosophy **64** (1967), № 8, 240–247.
9. Petkov V., *Is there an alternative to the block universe view?*, The ontology of spacetime, «Philosophy and foundations of physics» series, (D. Dieks, ред.), Т. 1, Elsevier, Amsterdam, 2006, Стр. 207–228.
10. *Отношение эквивалентности*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
11. Шарипов Р. А., *Основания геометрии для студентов и школьников*, БашГУ, Уфа, 1998; см. также arXiv:math.HO/0702029.
12. *Большой взрыв*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
13. *Силовые линии векторного поля*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
14. *Integral curve*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
15. Шарипов Р. А., *Курс аналитической геометрии*, БашГУ, Уфа, 2010; см. также arXiv:1111.6521.
16. Sharipov R. A., *A three-dimensional brane universe in a four-dimensional spacetime with a Big Bang*, e-print viXra:2207.0173.

17. Sharipov R. A., *Lagrangian approach to deriving the gravity equations for a 3D-brane universe*, e-print viXra:2301.0033.
18. Sharipov R. A., *Hamiltonian approach to deriving the gravity equations for a 3D-brane universe*, e-print viXra:2302.0120.
19. Sharipov R. A., *Energy conservation law for the gravitational field in a 3D-brane universe*, e-print viXra:2303.0123.
20. Sharipov R. A., *Speed of gravity can be different from the speed of light*, e-print viXra:23 04.0225.
21. Sharipov R. A., *On superluminal non-baryonic matter in a 3D-brane universe*, e-print viXra: 2305.0113.
22. Sharipov R. A., *A note on electromagnetic energy in the context of cosmology*, e-print viXra: 2207.0092.
23. Шарипов Р. А., *О динамике трёхмерной вселенной в четырёхмерном пространстве-времени*, Сборник тезисов конференции «Уфимская осенняя математическая школа 2022» (Фазуллин Э. Ю., ред.), Т. 2, С. 279–281; DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.104.
24. Шарипов Р. А., *Вселенная как 3D-брана и уравнения для неё*, Сборник тезисов конференции «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании 2022» (Габдрахманова Л. А., ред.) С. 37; DOI: 10.33184/fmpve2022-2022-10-19.30.
25. Шарипов Р. А., *Вселенная как 3D-брана и поле тяготения в ней*, Сборник тезисов конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», 13-17 марта, озеро Банное 2023 (Гарифуллин Р. Н., ред.), С. 128-129.
26. Шарипов Р. А., *Вселенная как 3D-брана и её эволюция*, Сборник тезисов II Всероссийской молодёжной школы-конференции «Современные физика, математика, цифровые и нанотехнологии в науке и образовании (ФМЦН-23)», посвящённой 80-летию со дня рождения д.ф.-м.н., профессора Р. С. Сингатуллина, 18-20 апреля, Уфа 2023 (Васильева Л. И., Кудашева Е. Г., Кудинов И. В., Измаилов Р. Н., Косарев Н. Ф., Гесс Д-Л. З., ред-ры), С. 142-143.
27. Шарипов Р. А., *Вселенная как 3D-брана и уравнение её эволюции*, Сборник тезисов IX Межрегиональной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Теоретические и экспериментальные исследования нелинейных процессов в конденсированных средах», 26-27 апреля, Уфа 2023 (Закирьянов Ф. К., Габдрахманова Л. А., Харисов А. Т., ред-ры), С. 16.
28. Sharipov R. A., *3D-brane gravity without equidistance postulate*, e-print viXra:2306.0104.
29. Sharipov R. A., *Lagrangian approach to deriving the gravity equations in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, viXra:2307.0039.

30. Sharipov R. A., *Superluminal non-baryonic particles in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, e-print viXra:2307.0072.
31. Sharipov R. A., *Energy conservation law for the gravitational field in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, electronic preprint viXra:2308.0175.
32. Sharipov R. A., *Decay of a superbradyon into a baryonic particle and its antiparticle*, e-print viXra:2403.0041.
33. Sharipov R. A., *Relativistic hardening and softening of fast moving springs*, 2024, ResearchGate publication № 379537924, DOI: 10.13140 /RG.2.2.10991.24488.
34. Шарипов Р. А., *Модель вселенной как 3D-браны*, Сборник тезисов международной научно-практической конференцмм «Спектральная теория операторов и смежные вопросы», посвященной 75-летию профессора Я. Т. Султанаева (Вильданова В. Ф., Гарифуллин Р. Н., Кудашева Е. Г., ред-ры), 2023, С. 38–39.
35. Шарипов Р. А., *Вселенная как 3D-брана без постулата эквидистантности*, Сборник тезисов конференции «Уфимская осенняя математическая школа 2023» (Фазуллин З. Ю., ред.), Т. 2, С. 153–156.
36. Шарипов Р. А., *Модель вселенной как 3D-браны*, Сборник тезисов 14-ой международной конференции «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании 2023», посвящённой 75-летию профессоров Я. Т. Султанаева и М. Х. Харрасова (Хабибуллин Б. Н., Екомасов Е. Г., Габдрахманова Л. А., Закирьянов Ф. К., Харисов А. Т., ред-ры), С. 18.
37. Шарипов Р. А., *Закон сохранения энергии для гравитационного поля в модели вселенной как 3D-браны*, Сборник тезисов конференции «Комплексный анализ, мат. физика и нелинейные уравнения», 11-15 марта, Павловка-Уфа 2024 (Гарифуллин Р. Н., ред.), С. 72-73.
38. *Метр*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
39. *Эталон времени*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
40. *Сверхтонкая структура*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
41. *Тёмная материя*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
42. *Кривая вращения галактики*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
43. *Гравитационная линза*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
44. *Лента Мёбиуса*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
45. *Уравнения Эйнштейна*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.

46. *Космологическая постоянная*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
47. *Гравитационная постоянная*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
48. *Классическая теория тяготения Ньютона*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
49. *Символы Кристоффеля*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
50. *Тензор кривизны*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
51. *Тензор Риччи*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
52. *Скалярная кривизна*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
53. Шарипов Р. А., *Курс дифференциальной геометрии*, Издание БашГУ, Уфа, 1996; см. также arXiv:math/0412421.
54. *Формула Якоби*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
55. *Принцип наименьшего действия*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
56. *Носитель функции*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
57. *Обобщённые координаты*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
58. *Преобразование Лежандра*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
59. *Формула Остроградского-Гаусса*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
60. *Закон Хаббла*, Wikipedia, Wikimedia Fnd. Inc., San Francisco, USA.
61. Фаддеев Л. Д., *Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна*, Успехи физ. наук **136** (1982), № 3, 436–457.
62. *Масса*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
63. *Метрика Шварцшильда*, Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
64. Gonzalez-Mestres L., *Properties of a possible class of particles able to travel faster than light*, e-print arXiv:astro-ph/9505117.
65. Gonzalez-Mestres L., *Space, time and superluminal particles*, e-print arXiv:physics/9702026.
66. Gonzalez-Mestres L., *Observing air showers from cosmic superluminal particles*, e-print arXiv:physics/9712049.
67. Gonzalez-Mestres L., *Physics opportunities above the Greisen-Zatsepin-Kuzmin cutoff: Lorentz symmetry violation at the Planck scale*, e-print arXiv:physics/9712047.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

Адрес:

Руслан Шарипов,
институт Информатики,
математики и робототехники
Уфимского университета,
науки и технологий,
ул. Заки Валиди 32,
450076 Уфа, Россия

Телефон:

+7-(347)-273-67-18 (рабочий)
+7-(917)-476-93-48 (сотовый)

Электронная почта:

r-sharipov@mail.ru
SharipovRA@uust.ru

Интернет-сайты:

https://ruslan-sharipov.ucoz.com
https://freetextbooks.narod.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Список публикаций автора за период с 1986-го по 2024-ый годы.

Часть 1. Теория солитонов.

1. Шарипов Р. А., *Конечнозонные аналоги N-мультиплетных решений уравнения КдФ*, Успехи Мат. Наук **41** (1986), № 5, 203–204.
2. Шарипов Р. А., *Солитонные мультиплеты уравнения Кортевега-де Фриза*, Доклады АН СССР **292** (1987), № 6, 1356–1359.
3. Шарипов Р. А., *Мультиплетные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили на конечнозонном фоне*, Успехи Мат. Наук **42** (1987), № 5, 221–222.
4. Bikbaev R. F., Sharipov R. A., *Magnetization waves in Landau-Lifshits model*, Physics Letters A **134** (1988), № 2, 105-108; see solv-int/9905008.
5. Бикбаев Р. Ф., Шарипов Р. А., *Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для уравнения КдФ в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \to \pm\infty$*, ТМФ **78** (1989), № 3, 345–356.
6. Шарипов Р. А., *Об интегрировании цепочек Богоявленского*, Мат. заметки **47** (1990), № 1, 157–160.
7. Черданцев И. Ю., Шарипов Р. А., *Конечнозонные решения уравнения Булло-Додда-Жибера-Шабата*, ТМФ **82** (1990), № 1, 155–160.
8. Cherdantsev I. Yu., Sharipov R. A., *Solitons on a finite-gap background in Bullough-Dodd-Jiber-Shabat model*, International. Journ. of Modern Physics A **5** (1990), № 5, 3021–3027; see math-ph/0112045.
9. Sharipov R. A., Yamilov R. I., *Backlund transformations and the construction of the integrable boundary value problem for the equation $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$*, «Задачи математической физики и асимптотика их решений», Институт Математики БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 1991, Стр. 66–77; см. solv-int/9412001.

10. Шарипов Р. А., *Минимальные торы в пятимерной сфере в* $\mathbb{C}^3$, ТМФ **87** (1991), № 1, 48–56; см. math.DG/0204253.
11. Сафин С. С., Шарипов Р. А., *Автопреобразование Бэклунда для уравнения* $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$, ТМФ **95** (1993), № 1, 146–159.
12. Boldin A. Yu., Safin S. S., Sharipov R. A., *On an old paper of Tzitzeika and the inverse scattering method*, Journal of Mathematical Physics **34** (1993), № 12, 5801–5809.
13. Павлов М. В., Свинолупов С. И., Шарипов Р. А., *Инвариантный критерий интегрируемости для систем уравнений гидродинамического типа*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 27–48; см. Функц. Анализ и Прил. **30** (1996), № 1, 18–29; см. также solv-int/9407003.
14. Ферапонтов Е. В., Шарипов Р. А., *О законах сохранения первого порядка для систем уравнений гидродинамического типа*, ТМФ **108** (1996), № 1, 109–128.

Часть 2. Геометрия нормального сдвига.

1. Болдин А Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **97** (1993), № 3, 386–395; см. также chao-dyn/9403003.
2. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Доклады РАН **334** (1994), № 2, 165–167.
3. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Многомерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **100** (1994), № 2, 264–269; см. также patt-sol/9404001.
4. Шарипов Р. А., *Проблема метризуемости для динамических систем, допускающих нормальный сдвиг*, ТМФ **101** (1994), № 1, 85–93; см. также solv-int/9404003.
5. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Успехи Мат. Наук **49** (1994), № 4, 105; см. solv-int/9404002.
6. Boldin A. Yu., Dmitrieva V. V., Safin S. S., Sharipov R. A., *Dynamical systems accepting the normal shift on an arbitrary Riemannian manifold*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, Ufa, 1994, pp. 4–19; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 256–266 и hep-th/9405021.
7. Boldin A. Yu., Bronnikov A. A., Dmitrieva V. V., Sharipov R. A., *Complete normality conditions for the dynamical systems on Riemannian manifolds*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 20–30; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 267–275 и astro-ph/9405049.

8. Sharipov R. A., *Higher dynamical systems accepting the normal shift*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 41–65.
9. Bronnikov A. A., Sharipov R. A., *Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in* $\mathbb{R}^n$, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 62–69
10. Sharipov R. A., *Metrizability by means of a conformally equivalent metric for the dynamical systems*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 80–90; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 276–282.
11. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *О решении уравнений нормальности в размерности* $n \geqslant 3$, Алгебра и анализ **10** (1998), № 4, 31–61; см. также solv-int/9610006.
12. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг,* диссертация на соискание ученой степени доктора наук в России, e-print math.DG/0002202 в электронном архиве https://arXiv.org, 2000, pp. 1–219.
13. Шарипов Р. А., *Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии*, Мат. Сборник **192** (2001), № 6, 105–144; см. также math.DG/0006125.
14. Шарипов Р. А., *Ньютоновские динамические системы, допускающие нормальное раздутие точек*, Зап. семинаров ПОМИ **280** (2001), 278–298; см. также math.DG/0008081.
15. Sharipov R. A., *On the solutions of the weak normality equations in multidimensional case*, e-print math.DG/0012110 in electronic archive https://arXiv.org (2000), 1–16.
16. Sharipov R. A., *First problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **30** (2002), № 9, 541–557; see also math.DG/0101150.
17. Sharipov R. A., *Second problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, e-print math.DG/0102141 in electronic archive https://arXiv.org (2001), 1–21.
18. Sharipov R. A., *A note on Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian dynamical systems in Riemannian manifolds*, e-print math.DG/0107212 in electronic archive https://arXiv.org (2001), 1–21.
19. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг, и волновые уравнения*, ТМФ **131** (2002), № 2, 244–260; см. также math.DG/0108158.
20. Sharipov R. A., *Normal shift in general Lagrangian dynamics*, e-print math.DG/0112089 in electronic archive https://arXiv.org (2001), 1–27.

21. Sharipov R. A., *Comparative analysis for a pair of dynamical systems one of which is Lagrangian*, e-print math.DG/0204161 in electronic archive https://arXiv .org (2002), 1–40.
22. Sharipov R. A., *On the concept of a normal shift in non-metric geometry*, e-print math.DG/0208029 in the archive https://arXiv.org (2002), 1–47.
23. Sharipov R. A., *V-representation for the normality equations in geometry of generalized Legendre transformation*, e-print math.DG/0210216 in electronic archive https://arXiv.org (2002), 1–32.
24. Sharipov R. A., *On a subset of the normality equations describing a generalized Legendre transformation*, e-print math.DG/0212059 in electronic archive https://arXiv.org (2002), 1–19.

Часть 3. Математический анализ и теория функций.

1. Sharipov R. A., Sukhov A. B. On *CR*-mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and the separate algebraicity for holomorphic functions, Trans. of American Math. Society **348** (1996), № 2, 767–780; см. также Доклады РАН **350** (1996), № 4, 453–454.
2. Sharipov R. A., Tsyganov E. N. On the separate algebraicity along families of algebraic curves, *Preprint of Baskir State University*, Ufa, 1996.
3. Шарипов Р. А., Цыганов Е. Н. О сепаратной алгебраичности вдоль семейств алгебраических кривых, Математические заметки **68** (2000), № 2, 294–302.
4. Sharipov R. A., *Algorithms for laying points optimally on a plane and a circle*, e-print 0705.0350 in the archive https://arXiv.org (2010), 1–6.
5. Sharipov R. A., *A note on Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print 1008.0376 in electronic archive https://arXiv.org (2010), 1–17.
6. Sharipov R. A., *Direct and inverse conversion formulas associated with Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print 1008.1572 in electronic archive https://arXiv.org (2010), 1–7.
7. Шарипов Р. А., *Контрпример к гипотезе Хабибуллина об интегральных неравенствах*, Уфимский мат. журн. **2** (2010), № 4, 98–106; см. также arXiv:1008.2738.
8. Sharipov R. A., *Clusters of exponential functions in the space of square integrable functions*, e-print 1410.7202 in electronic archive https://arXiv .org (2014), 1–8.
9. Sharipov R. A., *On root mean square approximation by exponential functions*, e-print 1411.2467 in the electronic archive https://arXiv.org (2014), 1–6.
10. Шарипов Р. А., *Об одной задаче, связанной с аппроксимацией функций экспонентами*, Уфимский мат. журнал **7** (2015), № 1, 86–97.

11. Masharov A. A., Sharipov R. A., *A strategy of numeric search for perfect cuboids in the case of the second cuboid conjecture*, e-print 1504.07161 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–21.
12. Sharipov R. A., *Reverse asymptotic estimates for roots of the cuboid characteristic equation in the case of the second cuboid conjecture*, e-print 1505.00724 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–17.
13. Sharipov R. A., *Asymptotic estimates for roots of the cuboid characteristic equation in the linear region*, e-print 1505.02745 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–17.
14. Sharipov R. A., *Asymptotic estimates for roots of the cuboid characteristic equation in the nonlinear region*, e-print 1506.04705 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–24.
15. Шарипов Р. А., *Асимптотический подход к задаче о совершенном кубоиде*, Уфимский мат. журнал **7** (2015), № 3, 100-113.
16. Ageev O. V., Sharipov R. A., *On linear regression in three-dimensional Euclidean space*, e-print 1907.06009 in electronic archive https://arXiv.org (2019), 1–4.
17. Ageev O. V., Sharipov R. A., *On cylindrical regression in three-dimensional Euclidean space*, e-print 1908.02215 in electronic archive https://arXiv.org (2019), 1–10.

Часть 4. Симметрии и инварианты.

1. Dmitrieva V. V., Sharipov R. A., *On the point transformations for the second order differential equations*, e-print solv-int/9703003 in electronic archive https://arXiv.org (1997), 1–14.
2. Sharipov R. A., *On the point transformations for the equation $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$*, e-print solv-int/9706003 in electronic archive https://arXiv.org (1997), 1–35; см. Вестник БашГУ **1(I)** (1998), 5–8.
3. Михайлов О. Н., Шарипов Р. А., *О точечном расширении одного класса дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифф. уравнения **36** (2000), № 10, 1331–1335; см. также solv-int/9712001.
4. Sharipov R. A., *Effective procedure of point-classification for the equation $y'' = P + 3\,Q\,y' + 3\,R\,y'^2 + S\,y'^3$*, math.DG/9802027 in electronic archive https://arXiv.org (1998), 1–35.
5. Дмитриева В. В., Гладков А. В., Шарипов Р. А., *О некоторых уравнениях, сводящихся к уравнениям диффузионного типа*, ТМФ **123** (2000), № 1, 26–37; см. также math.AP/9904080.
6. Dmitrieva V. V., Neufeld E. G., Sharipov R. A., Tsaregorodtsev A. A., *On a point symmetry analysis for generalized diffusion type equations*, e-print math.AP/9907130 in the archive https://arXiv.org (1999), 1–52.

7. Sharipov R. A., *Comparison of two classifications of a class of ODE's in the case of general position*, e-print 1704.05022 in electronic archive https://arXiv.org (2017), 1–17.
8. Sharipov R. A., *Comparison of two classifications of a class of ODE's in the first case of intermediate degeneration*, e-print 1705.01928 in electronic archive https://arXiv.org (2017), 1–26.
9. Sharipov R. A., *Umbilical and zero curvature equations in a class of second order ODE's*, e-print 1705.06389 in electronic archive https://arXiv.org (2017), 1–19.

Часть 5. Общая алгебра.

1. Sharipov R. A., *Orthogonal matrices with rational components in composing tests for High School students*, e-print math.GM/0006230 in electronic archive https://arXiv.org (2000), 1–10.
2. Sharipov R. A., *On the rational extension of Heisenberg algebra*, e-print math.RA/0009194 in Electronic archive https://arXiv.org (2000), 1–12.
3. Sharipov R. A., *An algorithm for generating orthogonal matrices with rational elements*, e-print cs.MS/0201007 in the archive https://arXiv.org (2002), 1–7.
4. Sharipov R. A., *A note on pairs of metrics in a two-dimensional linear vector space*, e-print 0710.3949 in electronic archive https://arXiv.org (2007), 1–9.
5. Sharipov R. A., *A note on pairs of metrics in a three-dimensional linear vector space*, e-print 0711.0555 in electronic archive https://arXiv.org (2007), 1–17.
6. Sharipov R. A., *Transfinite normal and composition series of groups*, e-print 0908.2257 in electronic archive https://arXiv.org (2010), 1–12.
7. Sharipov R. A., *Transfinite normal and composition series of modules*, e-print 0909.2068 in electronic archive https://arXiv.org (2010), 1–12.
8. Sharipov R. A., *A note on invertible quadratic transformations of the real plane*, e-print 1507.01861 in the electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–21.
9. Sharipov R. A., *On some higher degree sign-definite multivariate polynomials associated with definite quadratic forms*, e-print 1507.05056 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–5.
10. Sharipov R. A., *On positive bivariate quartic forms*, e-print 1507.07125 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–14.
11. Sharipov R. A., *Multiple discriminants and critical values of a multivariate polynomial*, e-print 1508.00551 in the electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–10.

12. Sharipov R. A., *On quartic forms associated with cubic transformations of the real plane*, e-print 1508.03005 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–10.
13. Sharipov R. A., *A rough classification of potentially invertible cubic transformations of the real plane*, e-print 1508.04703 in electronic archive https://arXiv.org (2015), 1–8.
14. Шарипов Р. А., *О знакоопределённости косо-характеристических полиномов*, Доклады БашГУ **1** (2016), № 1, 32–35.
15. Шарипов Р. А., *Кратные дискриминанты и экстремальные значения многочленов от многих переменных*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **143** (2017), № 1, ВИНИТИ, 87–94.
16. Sharipov R. A., *Multiple discriminants and critical values of a multivariate polynomial*, Journal of Math. Sciences, **245** (2020), № 1, 89–97.

Часть 6. Физика твердого тела.

1. Lyuksyutov S. F., Sharipov R. A., *Note on kinematics, dynamics, and thermodynamics of plastic glassy media*, e-print cond-mat/0304190 in electronic archive https://arXiv.org (2003), 1–19.
2. Lyuksyutov S. F., Sharipov R. A., Sigalov G., Paramonov P. B., *Exact analytical solution for electrostatic field produced by biased atomic force microscope tip dwelling above dielectric-conductor bilayer*, e-print cond-mat/0408247 in electronic archive https://arXiv.org (2004), 1–6.
3. Lyuksyutov S. F., Paramonov P. B., Sharipov R. A., Sigalov G., *Induced nanoscale deformations in polymers using atomic force microscopy*, Phys. Rev. B **70** (2004), № 174110.
4. Lyuksyutov S. F., Sharipov R. A., *Separation of plastic deformations in polymers based on elements of general nonlinear theory*, e-print cond-mat/0408433 in electronic archive https://arXiv.org (2004), 1–4.
5. Comer J., Sharipov R. A., *A note on the kinematics of dislocations in crystals*, e-print math-ph/0410006 in electronic archive https://arXiv.org (2004), 1–15.
6. Sharipov R. A., *Gauge or not gauge*, e-print cond-mat/0410552 in electronic archive https://arXiv.org (2004), 1–12.
7. Sharipov R. A., *Burgers space versus real space in the nonlinear theory of dislocations*, e-print cond-mat/0411148 in the archive https://arXiv.org (2004), 1–10.
8. Comer J., Sharipov R. A., *On the geometry of a dislocated medium*, e-print math-ph/0502007 in the archive https://arXiv.org (2005), 1–17.
9. Sharipov R. A., *A note on the dynamics and thermodynamics of dislocated crystals*, e-print cond-mat/0504180 in the archive https://arXiv.org (2005), 1–18.

Часть 7. Тензорный анализ.

1. Sharipov R. A., *Tensor functions of tensors and the concept of extended tensor fields*, e-print math/0503332 in the archive https://arXiv.org (2005), 1–43.
2. Sharipov R. A., *Spinor functions of spinors and the concept of extended spinor fields*, e-print math.DG/0511350 in the archive https://arXiv.org (2005), 1–56.
3. Sharipov R. A., *Commutation relationships and curvature spin-tensors for extended spinor connections*, e-print math.DG/0512396 in electronic archive https://arXiv.org (2005), 1-22.

Часть 8. Частицы и поля.

1. Sharipov R. A., *A note on Dirac spinors in a non-flat space-time of general relativity*, e-print math.DG/0601262 in electronic archive https://arXiv.org (2006), 1–22.
2. Sharipov R. A., *A note on metric connections for chiral and Dirac spinors*, e-print math.DG/0602359 in electronic archive https://arXiv.org (2006), 1–40.
3. Sharipov R. A., *On the Dirac equation in a gravitation field and the secondary quantization*, e-print math.DG/0603367 in electronic archive https://arXiv.org (2006), 1–10.
4. Sharipov R. A., *The electro-weak and color bundles for the Standard Model in a gravitation field*, e-print math.DG/0603611 in electronic archive https://arXiv.org (2006), 1–8.
5. Sharipov R. A., *A note on connections of the Standard Model in a gravitation field*, e-print math.DG/0604145 in electronic archive https://arXiv.org (2006), 1–11.
6. Sharipov R. A., *A note on the Standard Model in a gravitation field*, e-print math.DG/0605709 in the archive https://arXiv.org (2006), 1–36.
7. Sharipov R. A., *The Higgs field can be expressed through the lepton and quark fields*, e-print hep-ph/0703001 in the archive https://arXiv.org (2007), 1–4.
8. Sharipov R. A., *Comparison of two formulas for metric connections in the bundle of Dirac spinors*, e-print 0707.0482 in electronic archive https://arXiv.org (2007), 1–16.
9. Sharipov R. A., *On the spinor structure of the homogeneous and isotropic universe in closed model*, e-print 0708.1171 in the archive https://arXiv.org (2007), 1–25.
10. Sharipov R. A., *On Killing vector fields of a homogeneous and isotropic universe in closed model*, e-print 0708.2508 in the archive https://arXiv.org (2007), 1–19.

11. Sharipov R. A., *On deformations of metrics and their associated spinor structures*, e-print 0709.1460 in the electronic archive https://arXiv.org (2007), 1–22.
12. Sharipov R. A., *A cubic identity for the Infeld-van der Waerden field and its application*, e-print 0801.0008 in electronic archive https://arXiv.org (2008), 1–18.
13. Sharipov R. A., *A note on Kosmann-Lie derivatives of Weyl spinors*, e-print 0801.0622 in electronic archive https://arXiv.org (2008), 1–22.
14. Sharipov R. A., *On operator fields in the bundle of Dirac spinors*, e-print 0802.1491 in electronic archive https://arXiv.org (2008), 1–14.
15. Sharipov R. A., *A model with two quantum particles similar to the hydrogen atom*, e-print 1308.0221 in the electronic archive https://arXiv.org (2013), 1–11.
16. Sharipov R. A., *A note on electromagnetic energy in the context of cosmology*, e-print viXra:2207.0092 in electronic archive https://viXra.org (2022), 1–11.

Часть 9. Теория чисел.

1. Sharipov R. A., *A note on a perfect Euler cuboid*, e-print 1104.1716 in electronic archive https://arXiv.org (2011), 1–8.
2. Sharipov R. A., *A note on the* Sopfr(n) *function*, e-print 1104.5235 in electronic archive https://arXiv.org (2011), 1–7.
3. Sharipov R. A., *Perfect cuboids and irreducible polynomials*, e-print 1108.5348 in electronic archive https://arXiv.org (2011), 1–8.
4. Шарипов Р. А., *Неприводимые полиномы в задаче о совершенном кубоиде*, Уфимский мат. журнал **4** (2012), № 1, 153–160.
5. Sharipov R. A., *A note on the first cuboid conjecture*, e-print 1109.2534 in electronic archive https://arXiv.org (2011), 1–6.
6. Sharipov R. A., *A note on the second cuboid conjecture. Part I*, e-print 1201.1229 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–10.
7. Sharipov R. A., *A note on the third cuboid conjecture. Part I*, e-print 1203.2567 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–34.
8. Sharipov R. A., *Perfect cuboids and multisymmetric polynomials*, e-print 1205.3135 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–12.
9. Sharipov R. A., *On an ideal of multisymmetric polynomials associated with perfect cuboids*, e-print 1206.6769 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–17.
10. Sharipov R. A., *On the equivalence of cuboid equations and their factor equations*, e-print 1207.2102 in the electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–11.

11. Sharipov R. A., *A biquadratic Diophantine equation associated with perfect cuboids*, e-print 1207.4081 in the electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–17.
12. Ramsden J. R., Sharipov R. A., *Inverse problems associated with perfect cuboids*, e-print 1207.6764 in the electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–11.
13. Sharipov R. A., *On a pair of cubic equations associated with perfect cuboids*, e-print 1208.0308 in the archive https://arXiv.org (2012), 1–15.
14. Sharipov R. A., *On two elliptic curves associated with perfect cuboids*, e-print 1208.1227 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–11.
15. Ramsden J. R., Sharipov R. A., *On singularities of the inverse problems associated with perfect cuboids*, e-print 1208.1859 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–6.
16. Ramsden J. R., Sharipov R. A., *On two algebraic parametrizations for rational solutions of the cuboid equations*, e-print 1208.2587 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–17.
17. Sharipov R. A., *A note on solutions of the cuboid factor equations*, e-print 1209.0723 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–15.
18. Sharipov R. A., *A note on rational and elliptic curves associated with the cuboid factor equations*, e-print 1209.5706 in electronic archive https://arXiv.org (2012), 1–15.
19. Ramsden J. R., Sharipov R. A., *Two and three descent for elliptic curves associated with perfect cuboids*, e-print 1303.0765 in electronic archive https://arXiv.org (2013), 1–37.
20. Gallyamov R. R., Kadyrov I. R., Kashelevskiy D. D., Sharipov R. A., Kutlugallyamov N. G., *A fast modulo primes algorithm for searching perfect cuboids and its implementation*, e-print 1601.00636 in electronic archive https://arXiv.org (2016), 1–11.
21. Sharipov R. A., *On Walter Wyss's no perfect cuboid paper*, e-print 1704.00165 in electronic archive https://arXiv.org (2017), 1–44.
22. Шарипов Р. А., *Симметрийный подход к задаче о совершенном кубоиде*, Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. **152** (2018), ВИНИТИ, 143–158.
23. Sharipov R. A., *On a simplified version of Hadamard's maximal determinant problem*, e-print 2104.01749 in the electronic archive https://arXiv.org (2021), 1–6.
24. Sharipov R. A., *Hadamard matrices in* $\{0, 1\}$ *presentation and an algorithm for generating them*, e-print 2105.01485 in electronic archive https://arXiv.org (2021), 1–12.
25. Sharipov R. A., *Pseudo-Hadamard matrices of the first generation and an algorithm for producing them*, e-print arXiv:2105.08974 (2021), 1–9.

26. Sharipov R. A., *Symmetry-based approach to the problem of a perfect cuboid*, Journal of Mathematical Sciences **252** (2021), № 2, 266–282.
27. Sharipov R. A., *Evolution patterns in Collatz problem*, e-print 2202.04441 in electronic archive https://arXiv.org (2022), 1–10.

Часть 10. Спектральная теория операторов.

1. Sharipov R. A., *Tetrahedral discretizations of the Schrodinger operator for the purposes of quantum chemistry*, e-print viXra:1808.0202 in electronic archive https://viXra.org (2018), 1–35.
2. Sharipov R. A., *On simultaneous approximation of several eigenvalues of a semi-definite self-adjoint linear operator in a Hilbert space*, e-print 1902.06722 in electronic archive https://arXiv.org (2019), 1–10.

Часть 11. Сверхвысотное строительство.

1. Sharipov R. A., *On upper limits for the height of inflated towers*, e-print viXra:2008.0185 in electronic archive https://viXra.org (2020), 1–18.

Часть 12. Неэйнштейновская теория гравитации.

1. Sharipov R. A., *A three-dimensional brane universe in a four-dimensional spacetime with a Big Bang*, e-print viXra:2207.0173 in electronic archive https://viXra.org (2022), 1–10.
2. Sharipov R. A., *Lagrangian approach to deriving the gravity equations for a 3D-brane universe*, e-print viXra:2301.0033 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–12.
3. Sharipov R. A., *Hamiltonian approach to deriving the gravity equations for a 3D-brane universe*, e-print viXra:2302.0120 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–21.
4. Sharipov R. A., *Energy conservation law for the gravitational field in a 3D-brane universe*, e-print viXra:2303.0123 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–12.
5. Sharipov R. A., *Speed of gravity can be different from the speed of light*, e-print viXra:2304.0225 in the electronic archive https://viXra.org (2023), 1–18.
6. Sharipov R. A., *On superluminal non-baryonic matter in a 3D-brane universe*, e-print viXra: 2305.0113 in the electronic archive https://viXra.org (2023), 1–7.
7. Sharipov R. A., *3D-brane gravity without equidistance postulate*, e-print viXra:2306.0104 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–14.
8. Sharipov R. A., *Lagrangian approach to deriving the gravity equations in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, electronic preprint viXra:2307.0039 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–18.

9. Sharipov R. A., *Superluminal non-baryonic particles in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, e-print viXra:2307.0072 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–11.
10. Sharipov R. A., *Energy conservation law for the gravitational field in a 3D-brane universe without equidistance postulate*, electronic preprint viXra:2308.0175 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–20.
11. Sharipov R. A., *Decay of a superbradyon into a baryonic particle and its antiparticle*, e-print viXra:2403.0041 in electronic archive https://viXra.org (2023), 1–8.
12. Sharipov R. A., *Relativistic hardening and softening of fast moving springs*, 2024, ResearchGate publication № 379537924, DOI: 10.13140/RG.2.2.10991.24488, 1–10.

Часть 13. Медицинская техника.

1. Шарипов Р. А., *Полимерный зубной имплантат чулочного типа и способ его применения*, Патент Российской Федерации на изобретение № 2 401 082 C2 от 10.10.2010, Бюл. 28.
2. Шарипов Р. А., *Зубной имплантат чулочного типа в закрытом исполнении*, Патент Российской Федерации на изобретение № 2 559 094 C2 от 10.08.2015, Бюл. 22.

Часть 14. Химия и химическая технология.

1. Шарипов Р. А., *Способ регенерации полиэтилена из твёрдых бытовых отходов*, Доклады БашГУ **2** (2017), № 4, 559–563.
1. Шарипов Р. А., Манченков И. Б., *Об углеводородном топливе из растительной биомассы*, Доклады БашГУ **6** (2021), № 5, 312–317.

Научное электронное издание

ШАРИПОВ Руслан Абдулович

МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ КАК 3D-БРАНЫ

Монография, часть I

ISBN 978-5-600-04170-7

9 785600 041707 >

Формат страницы A5, 60×90/16.
Усл. печ. л. 7,63. Уч.-изд. л. 6,30.

Издатель Р. А. Шарипов: r-sharipov@mail.ru
https://ruslan-sharipov.ucoz.com

ISBN 978-5-600-04170-7

9 785600 041707 >