

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ШАРИПОВ Р. А.**

# **КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Учебное пособие

УФА 2010

УДК 514.123

ББК 22.151

Ш25

Рецензент: кафедра Математического анализа БГПУ  
имени М. Акмуллы, г. Уфа.

Подготовка книги к изданию выполнена методом компьютерной верстки на базе пакета  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$  от Американского Математического Общества. При этом были использованы кириллические шрифты семейства Lh, распространяемые Ассоциацией *CyrTUG* пользователей кириллического  $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ 'а.

**Шарипов Р. А.**

Ш25 Курс аналитической геометрии:

Учебное пособие / Р. А. Шарипов. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2010. — 228 с.

ISBN 978-5-7477-2574-4

Учебное пособие по курсу аналитической геометрии адресовано студентам математикам, физикам, а также студентам инженерно-технических, технологических и иных специальностей, для которых государственные образовательные стандарты предусматривают изучение данного предмета.

УДК 514.123

ББК 22.151

ISBN 978-5-7477-2574-4

© Шарипов Р. А., 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

ОГЛАВЛЕНИЕ. ....	3.
ПРЕДИСЛОВИЕ. ....	7.
ГЛАВА I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ....	9.
§ 1. Трёхмерное евклидово пространство. Аксиоматика и наглядная очевидность. ....	9.
§ 2. Геометрические векторы. Привязка векторов к точкам. ....	11.
§ 3. Равенство векторов. ....	13.
§ 4. Понятие свободного вектора. ....	14.
§ 5. Сложение векторов. ....	16.
§ 6. Умножение вектора на число. ....	18.
§ 7. Свойства алгебраических операций с векторами. ....	21.
§ 8. Векторные выражения и их преобразование. ....	29.
§ 9. Линейные комбинации. Тривиальность, нетривиальность и равенство нулю. ....	33.
§ 10. Линейная зависимость и линейная независимость. ....	35.
§ 11. Свойства линейной зависимости. ....	37.
§ 12. Линейная зависимость при $n = 1$ . ....	38.
§ 13. Линейная зависимость при $n = 2$ . Коллинеарность векторов. ....	39.
§ 14. Линейная зависимость при $n = 3$ . Компланарность векторов. ....	41.
§ 15. Линейная зависимость при $n \geq 4$ . ....	44.
§ 16. Базисы на прямой. ....	46.
§ 17. Базисы на плоскости. ....	47.
§ 18. Базисы в пространстве. ....	49.
§ 19. Единственность разложения вектора по базису. ....	51.

§ 20. Соглашение о расстановке индексов. ....	52.
§ 21. Использование координат векторов. ....	54.
§ 22. Замена базиса. Формулы перехода и матрицы перехода. ....	55.
§ 23. Некоторые сведения о матрицах перехода. ....	59.
§ 24. Расстановка индексов в суммах. ....	61.
§ 25. Пересчёт координат вектора при замене базиса. ....	64.
§ 26. Скалярное произведение. ....	67.
§ 27. Ортогональная проекция на прямую. ....	68.
§ 28. Свойства скалярного произведения. ....	75.
§ 29. Вычисление скалярного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе. ....	77.
§ 30. Симметричность матрицы Грама. ....	80.
§ 31. Ортонормированный базис. ....	82.
§ 32. Матрица Грама ортонормированного базиса. ....	83.
§ 33. Вычисление скалярного произведения по коорди- натам векторов в ортонормированном базисе. ....	84.
§ 34. Правые и левые тройки векторов. Понятие ориентации. ....	85.
§ 35. Векторное произведение. ....	86.
§ 36. Ортогональная проекция на плоскость. ....	88.
§ 37. Поворот вокруг оси. ....	90.
§ 38. Связь векторного произведения с проекциями и поворотами. ....	94.
§ 39. Свойства векторного произведения. ....	95.
§ 40. Структурные константы векторного произведения. ....	97.
§ 41. Вычисление векторного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе. ....	98.
§ 42. Структурные константы векторного произведения в ортонормированном базисе. ....	99.
§ 43. Символ Леви-Чивита. ....	102.
§ 44. Вычисление векторного произведения по коор- динатам векторов в ортонормированном базисе. ....	105.
§ 45. Смешанное произведение. ....	107.

§ 46. Вычисление смешанного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе. ....	107.
§ 47. Свойства смешанного произведения. ....	110.
§ 48. Понятие ориентированного объёма. ....	113.
§ 49. Структурные константы смешанного произведения. ....	115.
§ 50. Вычисление смешанного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе. ....	117.
§ 51. Связь структурных констант векторного и смешанного произведений. ....	119.
§ 52. Эффективизация формул для вычисления векторного и смешанного произведений. ....	124.
§ 53. Ориентация пространства. ....	126.
§ 54. Формулы свёртки. ....	127.
§ 55. Формула двойного векторного произведения и тождество Якоби. ....	133.
§ 56. Формула для умножения двух смешанных произведений. ....	136.

## ГЛАВА II. ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ. ....

§ 1. Декартовы системы координат. ....	141.
§ 2. Уравнения линий и поверхностей. ....	143.
§ 3. Прямая на плоскости. ....	144.
§ 4. Плоскость в пространстве. ....	150.
§ 5. Прямая в пространстве. ....	156.
§ 6. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. ....	162.
§ 7. Эксцентриситет и директрисы эллипса. Свойство директрис. ....	167.
§ 8. Уравнение касательной к эллипсу. ....	169.
§ 9. Фокальное свойство эллипса. ....	171.
§ 10. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. ....	174.
§ 11. Эксцентриситет и директрисы гиперболы. Свойство директрис. ....	180.

§ 12. Уравнение касательной к гиперболе. ....	182.
§ 13. Фокальное свойство гиперболы. ....	185.
§ 14. Асимптоты гиперболы. ....	188.
§ 15. Парабола. Каноническое уравнение параболы. ....	188.
§ 16. Эксцентриситет параболы. ....	191.
§ 17. Уравнение касательной к параболе. ....	191.
§ 18. Фокальное свойство параболы. ....	194.
§ 19. Шкала эксцентриситетов. ....	195.
§ 20. Замена системы координат. ....	196.
§ 21. Пересчёт координат точки при замене системы координат. ....	197.
§ 22. Поворот прямоугольной системы координат на плоскости. Матрица поворота. ....	198.
§ 23. Кривые второго порядка. ....	200.
§ 24. Классификация кривых второго порядка. ....	201.
§ 25. Поверхности второго порядка. ....	206.
§ 26. Классификация поверхностей второго порядка. ....	207.
 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. ....	 217.
 КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ. ....	 218.
 ПРИЛОЖЕНИЕ. ....	 219.

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

Элементарная геометрия, которую изучают в средней школе, имеет дело с такими базовыми понятиями, как *точка, прямая, плоскость, отрезок*. Из них конструируются более сложные понятия: *ломаная, многоугольник, многогранник*. Рассматриваются и некоторые криволинейные фигуры: *окружность, круг, цилиндр, конус, сфера, шар*.

Аналитическая геометрия в основном имеет дело с теми же геометрическими объектами, что и элементарная геометрия. Разница состоит в методе изучения этих объектов. Элементарная геометрия основывается на наглядных образах и формулирует простейшие свойства геометрических объектов в своих аксиомах. Из них выводятся различные теоремы, содержание которых в большинстве случаев также достаточно наглядно проявляется в геометрических образах. Аналитическая геометрия больше тяготеет к числовому описанию геометрических объектов и их свойств.

Переход от геометрического описания к числовому становится возможным благодаря введению системы координат. Она связывает с геометрическими точками определённые наборы чисел — координаты этих точек. Идея применения координат в геометрии принадлежит французскому математику Рене Декарту. Простейшие системы координат, предложенные им, в настоящее время называются *декартовыми системами координат*.

В основе построения декартовых координат и в основе всей аналитической геометрии лежит понятие *вектора*. Раздел аналитической геометрии, изучающий свойства векторов, называется *векторной алгеброй*. Именно с этого раздела начинается данная книга. Векторная алгебра излагается в первой главе. Далее следуют вторая глава, где излагаются *теория прямых и плоскостей* и *теория кривых второго порядка*. В заключительной части второй главы кратко излагается *теория поверхностей второго порядка*.

В основу книги положен курс лекций, читавшийся автором в течении ряда лет в Башкирском государственном университете. Она задумывалась как первая в серии из трёх книг. Однако, так сложилось, что вторая и третья книги этой серии были написаны и изданы раньше первой. Это

- «Курс линейной алгебры и многомерной геометрии» [1];
- «Курс дифференциальной геометрии» [2].

Были также написаны и изданы ещё четыре книги:

- «Представления конечных групп» [3];
- «Классическая электродинамика и теория относительности» [4];
- «Быстрое введение в тензорный анализ» [5].
- «Основания геометрии для студентов и школьников» [6].

Книгу [3] можно рассматривать как продолжение книги [1], которое иллюстрирует применение методов линейной алгебры в другом разделе математики — в теории групп. Книгу [4] можно рассматривать как продолжение книги [2]. Она иллюстрирует применение методов дифференциальной геометрии в физике. Книга [5] — это краткое изложение части материала книги [2]. А вот книга [6] по своему содержанию должна была бы предшествовать данной книге. Её можно рекомендовать читателю для более глубокого логического осмысления материала элементарной геометрии.

Декабрь, 2010 г.

Р. А. Шарипов.



## ГЛАВА I

# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

### § 1. Трёхмерное евклидово пространство. Аксиоматика и наглядная очевидность.

Подобно элементарной геометрии, изложенной в книге [6], аналитическая геометрия — это геометрия трёхмерного пространства  $\mathbb{E}$ . Символом  $\mathbb{E}$  в этой книге обозначается пространство, которое мы все наблюдаем в нашей повседневной жизни. Несмотря на кажущуюся простоту, даже пустое пространство  $\mathbb{E}$  обладает богатым набором свойств. Эти свойства проявляются в виде свойств различных геометрических фигур, которые находятся в этом пространстве или потенциально могут в нём находиться.

Систематическим изучением геометрических фигур в пространстве  $\mathbb{E}$  стали заниматься древнегреческие математики. Особенного успеха в этом деле добился Евклид. Он сформулировал основные свойства пространства  $\mathbb{E}$  в виде пяти постулатов, из которых стал выводить все прочие его свойства. В наше время постулаты стали называть аксиомами. Исходя из современных требований к строгости математических рассуждений, список аксиом Евклида пришлось расширить с пяти до двадцати. Их можно найти в книге [6]. В честь Евклида пространство, наблюдаемое в нашей повседневной жизни, стали обозначать буквой  $\mathbb{E}$  и стали называть трёхмерным евклидовым точечным пространством.

Трёхмерное евклидово точечное пространство  $\mathbb{E}$  состоит из точек. Все геометрические фигуры в нём тоже состоят из точек. Они являются подмножествами пространства  $\mathbb{E}$ . Среди подмножеств пространства  $\mathbb{E}$  особую роль играют прямые и плоскости (см. рис. 1.1). Они входят в формулировку первых одиннадцати аксиом Евклида. На основе этих одиннадцати аксиом вводится понятие отрезка (см. рис. 1.2). Понятие отрезка входит в формулировку двенадцатой аксиомы Евклида.

Первых двенадцати аксиом оказывается достаточно для определения понятия луча и понятия угла между двумя лучами, исходящими из одной точки. Понятий отрезка и угла

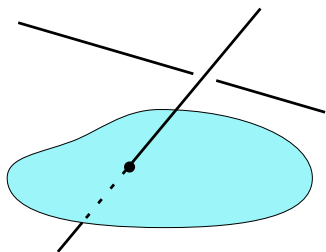


Рис. 1.1

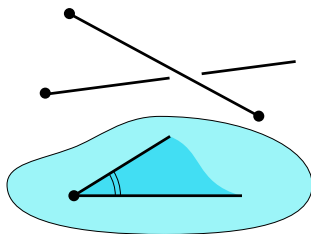


Рис. 1.2

вместе с понятиями точки, прямой и плоскости оказывается достаточно для формулировки остальных восьми аксиом Евклида и построения всей элементарной геометрии в целом.

Даже приведённый выше очень краткий обзор содержания книги [6] показывает, что аксиоматическое построение элементарной геометрии на основе аксиом Евклида — это кропотливое и трудоёмкое дело. Но читатель, знакомый с элементарной геометрией по школьной программе, легко заметит, что доказательства теорем в школьных учебниках геометрии гораздо проще, чем в книге [6]. Дело в том, что многие доказательства из школьных учебников не являются доказательствами в строго математическом смысле. При тщательном разборе в составе таких доказательств можно обна-

ружить использование не доказанных утверждений, которые являются визуально очевидными по рисунку в силу нашего повседневного опыта проживания в пространстве  $\mathbb{E}$ . Такие доказательства можно превратить в строго математические, восполнив имеющиеся в них пробелы путём доказательства использованных визуально очевидных утверждений.

В данной книге читатель не будет перегружаться скрупулёзными и абсолютно строгими доказательствами геометрических результатов как в книге [6]. Для геометрических определений, построений и теорем будет использоваться уровень строгости близкий к школьным учебникам, который допускает применение рисунков и визуально очевидных фактов. По мере возможности будут делаться указания на наличие строгих формулировок и доказательств в книге [6]. В аналитической же части, то есть в уравнениях, в формулах и в вычислениях, будет применяться общепринятый в математике уровень строгости без всяких отступлений.

## § 2. Геометрические векторы. Привязка векторов к точкам.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Геометрическим вектором  $\overrightarrow{AB}$  называют отрезок  $[AB]$ , в котором выделено направление от точки  $A$  к точке  $B$ . Точка  $A$  называется *начальной точкой* вектора  $\overrightarrow{AB}$ , а точка  $B$  — его *конечной точкой*.

Направленность вектора  $\overrightarrow{AB}$  на рисунке отмечают, изображая на нём стрелку (см. рис. 2.1). По этой причине вектора иногда называют *направленными отрезками*.

С одним и тем же отрезком  $[AB]$  можно связать два различных вектора:  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BA}$ . Вектор  $\overrightarrow{BA}$  принято называть



Рис. 2.1

*противоположным вектором* для вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

Отметим, что изображение стрелки на векторе  $\overrightarrow{AB}$  и изображение жирных точек на концах отрезка  $[AB]$  лишь условности, используемые для наглядности рисунка. Как множества точек вектор  $\overrightarrow{AB}$  и отрезок  $[AB]$  совпадают.

Задание направления на отрезке, превращающее его в вектор, может иметь различный смысл в различных ситуациях. Например, изображая вектор  $\overrightarrow{AB}$  на географической карте, обычно отмечают перемещение какого-либо объекта из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Но если это карта погоды, то тот же вектор  $\overrightarrow{AB}$  может определять направление и скорость ветра в пункте  $A$ . В первом случае длина вектора  $\overrightarrow{AB}$  пропорциональна расстоянию между пунктами  $A$  и  $B$ . Во втором случае она пропорциональна скорости ветра в пункте  $A$ .

Имеется ещё одно различие в двух рассмотренных выше примерах. В первом случае вектор  $\overrightarrow{AB}$  жёстко привязан к пунктам  $A$  и  $B$  по своему смыслу. Во втором случае он привязан лишь к пункту  $A$ , а то, что его конец совпал с пунктом  $B$ , есть чистая случайность, зависящая от того, в каком масштабе единицы скорости ветра пересчитываются в единицы длины на карте. В соответствии со сказанным геометрические вектора разделяются на два типа:

- 1) чисто геометрические,
- 2) условно геометрические.

К первому типу относятся лишь вектора перемещения, фактически связывающие две геометрические точки в пространстве  $E$ . Величина таких векторов всегда измеряется в единицах длины: сантиметрах, метрах, футах и др.

Векторов второго типа гораздо больше. Это вектора скоростей, ускорений и сил в механике, вектора напряжённости электрического и магнитного полей, вектора намагниченности в магнитных материалах и средах, вектора перепадов (градиентов) температур в неоднородно разогретых объектах и др. Эти вектора имеют геометрическое направление и при-

вязку к какой-либо одной геометрической точке пространства  $\mathbb{E}$ , но не имеют геометрической длины. Их длина может быть преобразована в геометрическую длину лишь после введения некоторого масштабного множителя.

Особое место среди геометрических векторов занимают нулевые вектора. Они определяются так.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Геометрический вектор в пространстве  $\mathbb{E}$ , начальная точка которого совпадает с конечной точкой, называется *нулевым вектором*.

Нулевой геометрический вектор может быть как чисто геометрическим, так и условно геометрическим. Это зависит от его физической природы.

### § 3. Равенство векторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Два геометрических вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *равными*, если они равны по длине и *сонаправлены*, то есть  $|AB| = |CD|$  и  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ .

Сонаправленность векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  означает, что эти вектора лежат на одной прямой, как показано на рисунке 3.1, либо на двух параллельных прямых, как показано на рисунке 3.2. При этом они должны быть направлены в одну

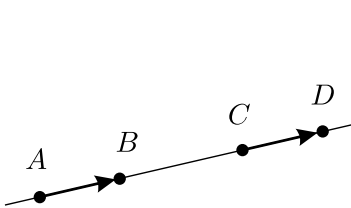


Рис. 3.1

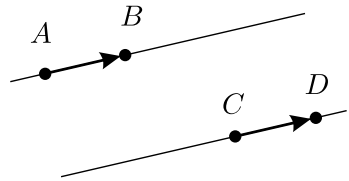


Рис. 3.2

сторону. Сонаправленность геометрических векторов и равенство их длин являются теми самыми наглядно очевидными

их свойствами, которые требуют значительных усилий при их выводе из аксиом Евклида (см. [6]). Здесь я призываю читателя не акцентироваться на нестрогости формулировок и целиком довериться своей геометрической интуиции.

Нулевые геометрические вектора представляют собой особый случай, поскольку они не задают в пространстве никакого собственного направления.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Все нулевые вектора считаются сонаправленными друг другу, а также любой нулевой вектор считается сонаправленным любому ненулевому вектору.

Длина всех нулевых векторов равна нулю. Однако, в зависимости от физической природы вектора этот ноль сопровождается своей единицей измерения. В случае вектора силы — это ноль ньютонов, а в случае вектора скорости — ноль метров в секунду. По этой причине при проверке равенства нулевых векторов учитывается их физическая природа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Все нулевые вектора одной физической природы считаются равными друг другу, а любой ненулевой вектор считается не равным любому нулевому.

При проверке равенства ненулевых векторов в определении 3.1 также учитывается их физическая природа. Равенство  $|AB| = |CD|$  в этом определении предполагает не только равенство числовых значений длины векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , но и совпадение единиц измерения этих длин.

**Замечание.** Вектора — это геометрические фигуры, то есть множества точек пространства  $\mathbb{E}$ . Однако, равенство двух векторов, введённое определением 3.1, отличается от равенства двух множеств.

#### § 4. Понятие свободного вектора.

При определении равенства векторов удобно использовать понятие параллельных переносов. Всякий параллельный перенос — это специального вида преобразование пространства

$p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , при котором всякая прямая отображается в саму себя либо параллельную ей прямую и всякая плоскость также отображается в саму себя либо в параллельную ей плоскость. В применении к векторам параллельные переносы сохраняют их длину и направление, т. е. переводят каждый геометрический вектор в равный ему вектор, расположенный в другом месте. Число параллельных переносов бесконечно велико. Оказывается параллельных переносов настолько много, что их можно использовать для проверки равенства векторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Геометрический вектор  $\overrightarrow{CD}$  называется равным геометрическому вектору  $\overrightarrow{AB}$ , если существует параллельный перенос  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , который переводит вектор  $\overrightarrow{AB}$  в вектор  $\overrightarrow{CD}$ , т. е. такой, что  $p(A) = C$  и  $p(B) = D$ .

Определение 4.1 равносильно определению 3.1. Я не стану доказывать этот факт, опираясь на его наглядную очевидность и знакомство читателя с параллельными переносами из курса средней школы. Более дотошный читатель может ознакомиться с теоремами 8.4 и 9.1 в главе VI книги [6].

**ТЕОРЕМА 4.1.** Для любых двух точек  $A$  и  $C$  в пространстве  $\mathbb{E}$  существует ровно один параллельный перенос  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , переводящий точку  $A$  в точку  $C$ , т. е. такой, что  $p(A) = C$ .

Теорема 4.1 также относится к числу наглядно очевидных фактов. Кроме того, она совпадает с теоремой 9.3 из главы VI в книге [6], где она доказана. Этим двух обстоятельств достаточно, чтобы использовать её здесь без доказательства.

Применим теорему 4.1 к геометрическому вектору  $\overrightarrow{AB}$ . Пусть  $C$  — произвольная точка пространства  $\mathbb{E}$  и пусть  $p$  — параллельный перенос, переводящий точку  $A$  в точку  $C$ . Существование и единственность такого параллельного переноса утверждается теоремой 4.1. Определим точку  $D$  соотношением  $D = p(B)$ . Тогда, согласно определению 4.1, имеем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Эти рассуждения показывают, что у всякого геометрического вектора  $\overrightarrow{AB}$  имеется равная ему копия, начинающаяся в произвольной точке  $C$  пространства  $E$ . Иными словами, при помощи параллельных переносов любой геометрический вектор  $\overrightarrow{AB}$  можно размножить до бесконечного семейства равных друг другу векторов, приложенных ко всем точкам пространства  $E$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** *Свободным вектором* называется бесконечная совокупность равных друг другу геометрических векторов, начала которых приходятся на каждую точку пространства  $E$ . Каждый геометрический вектор в этой бесконечной совокупности называется *геометрической реализацией* свободного вектора.

Свободные вектора могут формироваться как чисто геометрическими, так и условно геометрическими векторами. По этой причине могут рассматриваться свободные вектора самой разной физической природы.

При изображении свободных векторов на рисунках обычно рисуют одну или несколько их геометрических реализаций по мере необходимости. Геометрические вектора обычно обозначаются двумя заглавными буквами латинского алфавита:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  и т. д. Свободные вектора принято обозначать одной строчной буквой латинского алфавита:  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и т. д. Стрелки над буквами часто опускают, поскольку по контексту бывает ясно, что речь идёт о векторах. Далее в данной книге я не буду использовать стрелок при обозначении свободных векторов, однако буду применять жирный шрифт для них. Во многих других книгах, но не в моей книге [1], это ограничение тоже снимается.

## § 5. Сложение векторов.

Пусть заданы два свободных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Выберем некоторую произвольную точку  $A$  и рассмотрим геометрическую



реализацию вектора  $\mathbf{a}$  с началом в точке  $A$ . Концевую точку этой геометрической реализации обозначим через  $B$ . В результате этого получим  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ . Далее рассмотрим геометрическую реализацию вектора  $\mathbf{b}$  с началом в точке  $B$ , её концевую точку обозначим через  $C$ . Это даст  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.** Геометрический вектор  $\overrightarrow{AC}$ , соединяющий начало вектора  $\overrightarrow{AB}$  с концом вектора  $\overrightarrow{BC}$ , принято называть суммой векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \quad (5.1)$$

Геометрический вектор  $\overrightarrow{AC}$ , построенный при помощи векторов  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$  можно растиражировать до свободного вектора  $\mathbf{c}$  при помощи параллельных переносов во все точки пространства  $\mathbb{E}$ . Такой вектор  $\mathbf{c}$  естественно назвать суммой свободных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и записать  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Корректность такого определения гарантируется следующей леммой.

**ЛЕММА 5.1.** Сумма  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$  двух свободных векторов  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ , выражаемая формулой (5.1) не зависит от выбора точки  $A$ , в которой строится геометрическая реализация вектора  $\mathbf{a}$ .

**ДОК-ВО.** Наряду с точкой  $A$  выберем ещё одну начальную точку  $E$ . Тогда в описанной выше конструкции суммы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

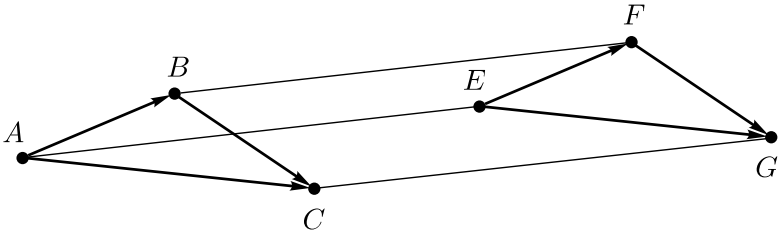


Рис. 5.1

вектор  $\mathbf{a}$  получит две геометрические реализации  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{EF}$ .

У вектора  $\mathbf{b}$  также будет две геометрические реализации  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{FG}$  (см. рисунок 5.1). В силу сказанного

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}. \quad (5.2)$$

По построению взамен (5.1) теперь мы имеем два равенства

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}. \quad (5.3)$$

Обозначим через  $p$  параллельный перенос, который переводит точку  $A$  в точку  $E$ , т.е. такой, что  $p(A) = E$ . В силу теоремы 4.1 параллельный перенос, удовлетворяющий этому условию, существует и единственен. Из  $p(A) = E$  и из первого равенства (5.2) в силу определения 4.1 выводим  $p(B) = F$ . Далее из  $p(B) = F$  и из второго равенства (5.2) в силу того же определения 4.1 получаем  $p(C) = G$ . В итоге имеем

$$p(A) = E, \quad p(C) = G. \quad (5.4)$$

Соотношения (5.4) означают, что параллельный перенос  $p$  переводит вектор  $\overrightarrow{AC}$  в вектор  $\overrightarrow{EG}$ . В силу определения 4.1 это даёт  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ . Теперь из равенств (5.3) выводим

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}. \quad (5.5)$$

Равенство (5.5) завершает доказательство леммы 5.1.  $\square$

Правило сложения векторов, выраженное формулой (5.1), называется *правилом треугольника*. Ему соответствует треугольник  $ABC$  на рисунке 5.1.

## § 6. Умножение вектора на число.

Пусть  $\mathbf{a}$  — некоторый свободный вектор. Выберем некоторую произвольную точку  $A$  и рассмотрим геометрическую

реализацию вектора  $\mathbf{a}$  с началом в точке  $A$ . Концевую точку этой геометрической реализации вектора  $\mathbf{a}$  обозначим через  $B$ . Пусть  $\alpha$  — некоторое число. Оно может быть положитель-

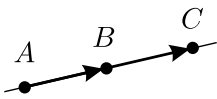


Рис. 6.1

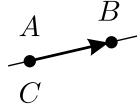


Рис. 6.2

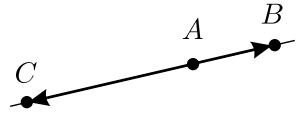


Рис. 6.3

ным, равным нулю, либо отрицательным.

Пусть  $\alpha > 0$ . В этом случае отложим точку  $C$  на прямой  $AB$  так, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}, \quad |AC| = |\alpha| \cdot |AB|. \quad (6.1)$$

В результате этого построения возникнет картинка, изображённая на рисунке 6.1.

При  $\alpha = 0$  выберем точку  $C$  совпадающей с точкой  $A$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{AC}$  окажется нулевым, как показано на рисунке 6.2, и будет выполнено соотношение

$$|AC| = |\alpha| \cdot |AB|. \quad (6.2)$$

В случае  $\alpha < 0$  отложим точку  $C$  на прямой  $AB$  так, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}, \quad |AC| = |\alpha| \cdot |AB|. \quad (6.3)$$

Этот случай изображён на рисунке 6.3.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** Во всех трёх случаях  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  и  $\alpha < 0$  геометрический вектор  $\overrightarrow{AC}$ , построенный по вектору  $\overrightarrow{AB}$  в соответствии с рисунками 6.1, 6.2 и 6.3 и в соответствии с формулами (6.1), (6.2) и (6.3), принято называть произведе-

нием вектора  $\overrightarrow{AB}$  на число  $\alpha$  и записывать это как

$$\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (6.4)$$

Случай нулевого вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  не охватывается рассмотренными выше случаями на рисунках 6.1, 6.2 и 6.3. В этом случае точка  $B$  совпадает с точкой  $A$  и  $|AB| = 0$ . Для того, чтобы выполнялось равенство  $|AC| = |\alpha| \cdot |AB|$ , точка  $C$  также выбирается совпадающей с точкой  $A$ . Поэтому произведение нулевого вектора на любое число вновь есть нулевой вектор.

Геометрический вектор  $\overrightarrow{AC}$ , построенный при помощи вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и числа  $\alpha$  можно растиражировать до свободного вектора  $\mathbf{c}$  при помощи параллельных переносов во все точки пространства  $\mathbb{E}$ . Такой вектор  $\mathbf{c}$  естественно назвать произведением свободного вектора  $\mathbf{a}$  на число  $\alpha$  и записать  $\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a}$ . Корректность такого определения гарантируется следующей леммой.

**ЛЕММА 6.1.** Произведение  $\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} = \overrightarrow{AC}$  свободного вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  на число  $\alpha$ , выражаемое формулой (6.4) не зависит от выбора точки  $A$ , в которой строится геометрическая реализация вектора  $\mathbf{a}$ .

**ДОК-ВО.** Проведём доказательство для случая  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и  $\alpha > 0$ . Наряду с точкой  $A$  выберем ещё одну начальную точку  $E$ . Тогда в конструкции произведения  $\alpha \cdot \mathbf{a}$  вектор  $\mathbf{a}$

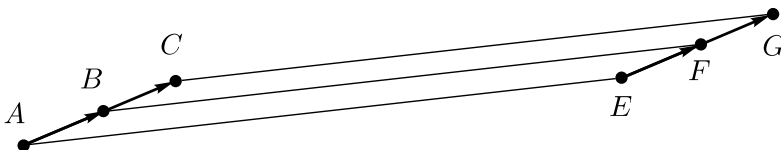


Рис. 6.4

получит две геометрические реализации  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{EF}$ . Отсюда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}. \quad (6.5)$$

Обозначим через  $p$  параллельный перенос, который переводит точку  $A$  в точку  $E$ , т.е. такой, что  $p(A) = E$ . Тогда из равенства (6.5) в силу определения 4.1 выводим  $p(B) = F$ . Точка  $C$  расположена на прямой  $AB$  на расстоянии  $|AC| = |\alpha| \cdot |AB|$  от точки  $A$  в направлении вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Аналогичным образом точка  $G$  расположена на прямой  $EF$  на расстоянии  $|EG| = |\alpha| \cdot |EF|$  от точки  $E$  в направлении вектора  $\overrightarrow{EF}$ . Из равенства (6.5) следует  $|AB| = |EF|$ . Поэтому из  $|AC| = |\alpha| \cdot |AB|$  и  $|EG| = |\alpha| \cdot |EF|$  следует  $|AC| = |EG|$ . В силу  $p(A) = E$  и  $p(B) = F$  параллельный перенос  $p$  переводит прямую  $AB$  в прямую  $EF$ . При этом он сохраняет длины отрезков и переводит сонаправленные векторы в сонаправленные. Отсюда выводим  $p(C) = G$ . Совместно с  $p(A) = E$  в силу определения 4.1 это равенство даёт  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ , т.е.

$$\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{EF}.$$

Для рассматриваемого случая  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и  $\alpha > 0$  лемма 6.1 доказана. Разбор остальных случаев я оставляю читателю в качестве упражнения.  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 6.1.** Рассмотрите случаи  $\alpha = 0$  и  $\alpha < 0$  при  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и отдельно рассмотрите случай  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Докажите лемму 6.1 для всех этих случаев и постройте соответствующие этим случаям рисунки, аналогичные рисунку 6.4.

## § 7. Свойства алгебраических операций с векторами.

Сложение свободных векторов и умножение свободных векторов на числа — это две базовые алгебраические операции с векторами в трёхмерном евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$ . Принято выделять восемь основных свойств этих двух алгебраических операций векторами. Первые четыре из этих восьми свойств характеризуют операцию сложения векторов.

Остальные четыре свойства характеризуют операцию умножения на числа и её связь с операцией сложения векторов.

**ТЕОРЕМА 7.1.** *Операция сложения свободных векторов и операция умножения этих векторов на числа обладают следующими свойствами:*

- 1) коммутативность сложения:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;
- 2) ассоциативность сложения:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ;
- 3) свойство нулевого вектора:  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ;
- 4) для любого вектора  $\mathbf{a}$  существует противоположный вектор  $\mathbf{a}'$ , такой, что  $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$ ;
- 5) дистрибутивность умножения относительно сложения векторов:  $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$ ;
- 6) дистрибутивность умножения относительно сложения чисел:  $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$ ;
- 7) ассоциативность операции умножения векторов на числа:  $(kq) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$ ;
- 8) свойство числовой единицы:  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

Рассмотрим перечисленные в теореме 7.1 свойства по отдельности. Начнём с коммутативности сложения векторов.

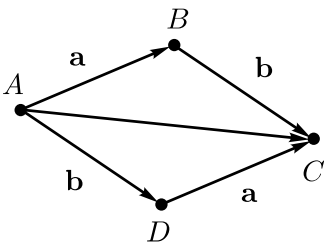


Рис. 7.1

Сумма  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  в левой части равенства  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  вычисляется по правилу треугольника после выбора геометрических реализаций  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$  как это показано на рисунке 7.1.

Проведём через точку  $A$  на рисунке 7.1 прямую, параллельную прямой  $BC$ . Затем проведём через точку  $C$  прямую, параллельную прямой  $AB$ . Обе эти прямые лежат в плоскости треугольника  $ABC$ . По этой причине они пересекаются в некоторой точке  $D$ . Отрезки  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  и  $[DA]$  образуют параллелограмм.

Отметим на отрезках  $[CD]$  и  $[DA]$  векторы  $\overrightarrow{DC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ . Легко видеть, что вектор  $\overrightarrow{DC}$  получается из вектора  $\overrightarrow{AB}$  параллельным переносом из точки  $A$  в точку  $D$ , а вектор  $\overrightarrow{AD}$  получается из вектора  $\overrightarrow{BC}$  параллельным переносом из точки  $B$  в точку  $A$ . Поэтому  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$  и  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ . Теперь треугольники  $ABC$  и  $ADC$  дают

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Из (7.1) вытекает требуемое равенство  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .

Соотношение  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  и рисунок 7.1 дают ещё один способ сложения векторов. Он называется *правилом параллелограмма*. Для сложения векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  берутся их геометрические реализации,  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$ , отложенные от одной точки. Они достраиваются до параллелограмма  $ABCD$ . Тогда диагональ параллелограмма будет геометрической реализацией суммы векторов  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.1.** Докажите равенство  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  для случая, когда  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ . Для этого рассмотрите подслучаи

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$ ;                                   | 2) $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$ и $ \mathbf{a}  >  \mathbf{b} $ ; |
| 3) $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$ и $ \mathbf{a}  =  \mathbf{b} $ ; | 4) $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$ и $ \mathbf{a}  <  \mathbf{b} $ . |

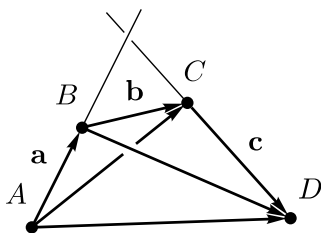


Рис. 7.2

Следующее свойство в теореме 7.1 — это ассоциативность сложения векторов. Для доказательства этого свойства выберем некоторую произвольную начальную точку  $A$  и построим следующие геометрические реализации векторов:  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ ,

$\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$  и  $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$ . Применив правило треугольника для сложения векторов к треугольникам  $ABC$  и  $ACD$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \end{aligned} \quad (7.2)$$

(см. рисунок 7.2). Применив это же правило к треугольникам  $BCD$  и  $ABD$ , получим аналогичные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{b} + \mathbf{c} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}, \\ \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Из формул (7.2) и (7.3) немедленно вытекает требуемое соотношение  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

**Примечание.** Четырёхугольник  $ABCD$  на рисунке 7.2 не обязан быть плоским. По этой причине прямая  $CD$  изображена проходящей под прямой  $AB$ , а прямая  $BD$  показана проходящей над прямой  $AC$ .

Свойство нулевого вектора  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  вытекает непосредственно из правила треугольника для сложения векторов. Действительно, если для вектора  $\mathbf{a}$  выбрана начальная точка  $A$  и построена геометрическая реализация  $\overrightarrow{AB}$ , то для нулевого вектора  $\mathbf{0}$  геометрической реализацией с началом в точке  $B$  будет нулевой вектор  $\overrightarrow{BB}$ . Из определения 5.1 получим  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ , что даёт  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ .

Существование противоположного вектора доказывается просто. Пусть вектор  $\mathbf{a}$  имеет геометрическую реализацию  $\overrightarrow{AB}$ . Рассмотрим геометрический вектор  $\overrightarrow{BA}$  и обозначим через  $\mathbf{a}'$  соответствующий ему свободный вектор. Тогда

$$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.$$

Дистрибутивность умножения относительно сложения векторов вытекает из свойств *преобразования гомотетии* в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$  (см. § 11 главы VI в книге [6]). Его



иногда называют *преобразованием подобия*, что не совсем точно. Преобразования подобия образуют более широкий класс преобразований, куда преобразования гомотетии включаются как подкласс.

Пусть  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  и пусть сумма векторов  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  вычислена по правилу треугольника как показано на рисунке 7.3. Предположим, что  $k > 0$ . Построим преобразование гомо-

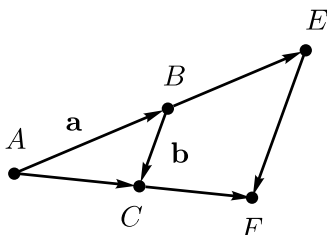


Рис. 7.3

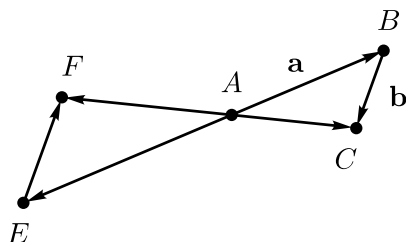


Рис. 7.4

тетии  $h_{kA} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  с центром в точке  $A$  и коэффициентом  $k$ . Обозначим через  $E$  образ точки  $B$  при отображении  $h_{kA}$  и обозначим через  $F$  образ точки  $C$  при этом отображении:

$$E = h_{kA}(B), \quad F = h_{kA}(C),$$

В силу свойств преобразования гомотетии прямая  $EF$  параллельна прямой  $BC$  и имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}, & \quad |EF| = |k| \cdot |BC|, \\ \overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{AB}, & \quad |AE| = |k| \cdot |AB|, \\ \overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{AC}, & \quad |AF| = |k| \cdot |AC|. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Сравнив (7.4) с (6.1) и учитывая то, что в рассматриваемом случае  $k > 0$ , из соотношений (7.4) выводим:

$$\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AF} = k \cdot \overrightarrow{AC}. \quad (7.5)$$

Соотношений (7.5) достаточно, чтобы доказать дистрибутивность умножения векторов на числа относительно операции сложения векторов. Действительно, из (7.5) получаем:

$$\begin{aligned} k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= k \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = k \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} = \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC} = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Случай  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  и  $k < 0$  очень похож на рассмотренный выше случай. В этом случае рисунок 7.3 заменяется рисунком 7.4. Вместо соотношений (7.4) имеем соотношения

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} \uparrow \downarrow \overrightarrow{BC}, \quad & |EF| = |k| \cdot |BC|, \\ \overrightarrow{AE} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AB}, \quad & |AE| = |k| \cdot |AB|, \\ \overrightarrow{AF} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AC}, \quad & |AF| = |k| \cdot |AC|. \end{aligned} \quad (7.7)$$

С учётом  $k < 0$  из (7.7) выводим (7.5) и (7.6).

В случае  $k = 0$  соотношение  $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$  сводится к равенству  $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ . Оно тривиальным образом выполнено.

**УПРАЖНЕНИЕ 7.2.** Докажите, что  $k \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k \cdot \mathbf{a} + k \cdot \mathbf{b}$ , для случая, когда  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ . Для этого рассмотрите подслучаи

- 1)  $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$ ;                      2)  $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$  и  $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$ ;
- 3)  $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$  и  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ;      4)  $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{b}$  и  $|\mathbf{a}| < |\mathbf{b}|$ .

В каждом из перечисленных подслучаев рассмотрите две возможности:  $k > 0$  и  $k < 0$ .

Перейдём к доказательству дистрибутивности умножения векторов на числа относительно сложения чисел. Случай  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  в равенстве  $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$  тривиален. В этом случае равенство  $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$  сводится к  $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ .

Случаи  $k = 0$  и  $q = 0$  также тривиальны. В этих случаях равенство  $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$  сводится к равенствам

$q \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} + q \cdot \mathbf{a}$  и  $k \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + \mathbf{0}$  соответственно.

Рассмотрим случай  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и для определённости будем считать  $k > 0$  и  $q > 0$ . Выберем некоторую произвольную точку

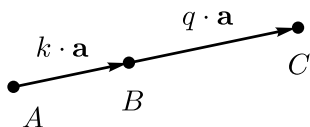


Рис. 7.5

А и построим геометрическую реализацию вектора  $k \cdot \mathbf{a}$  с началом в точке А. Пусть В — концевая точка этой геометрической реализации. Тогда  $\overrightarrow{AB} = k \cdot \mathbf{a}$ . Аналогичным образом построим геометрическую реализацию  $\overrightarrow{BC} = q \cdot \mathbf{a}$ . В силу  $k > 0$  и  $q > 0$  вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$  сонаправлены с вектором  $\mathbf{a}$ . Они лежат на одной прямой (см. рисунок 7.5). Сумма этих двух векторов

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \quad (7.8)$$

лежит на той же прямой и сонаправлена с вектором  $\mathbf{a}$ . Длина вектора  $\overrightarrow{AC}$  определяется формулой

$$|AC| = |AB| + |BC| = k|\mathbf{a}| + q|\mathbf{a}| = (k + q)|\mathbf{a}|. \quad (7.9)$$

В силу  $\overrightarrow{AC} \parallel \mathbf{a}$  и в силу  $k + q > 0$  из (7.9) получаем

$$\overrightarrow{AC} = (k + q) \cdot \mathbf{a}. \quad (7.10)$$

Подставим (7.10) в (7.8) и учтём соотношения  $\overrightarrow{AB} = k \cdot \mathbf{a}$  и  $\overrightarrow{BC} = q \cdot \mathbf{a}$ , которые выполнены в силу наших построений. Это приводит к равенству  $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$ , которое и требовалось доказать.

**УПРАЖНЕНИЕ 7.3.** Докажите, что  $(k + q) \cdot \mathbf{a} = k \cdot \mathbf{a} + q \cdot \mathbf{a}$ , для случая, когда  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , а числа  $k$  и  $q$  разных знаков. Для этого разберите отдельно подслучаи

- 1)  $|k| > |q|$ ;
- 2)  $|k| = |q|$ ;
- 3)  $|k| < |q|$ .

Ассоциативность операции умножения векторов на числа выражается равенством  $(kq) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$ . В случае  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  это равенство тривиальным образом выполнено. Оно сводится к  $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Если  $k = 0$  или  $q = 0$ , оно также тривиально и сводится к равенству  $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

Рассмотрим случай  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $k > 0$  и  $q > 0$ . Выберем некоторую произвольную точку  $A$  в пространстве  $\mathbb{E}$  и построим геометрическую реализацию вектора  $q \cdot \mathbf{a}$  с началом в точке  $A$ . Пусть  $B$  — концевая точка этой геометрической реализации. Тогда  $\overrightarrow{AB} = q \cdot \mathbf{a}$  (см. рисунок 7.6). В силу  $q > 0$  вектор  $\overrightarrow{AB}$  сонаправлен с вектором  $\mathbf{a}$ .

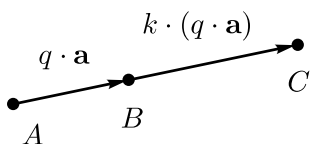


Рис. 7.6

Построим вектор  $\overrightarrow{AC}$  как произведение  $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$  на основе определения 6.1. В силу  $k > 0$  вектор  $\overrightarrow{AC}$  также сонаправлен с  $\mathbf{a}$ . Длины  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  даются формулами

$$|AB| = q|\mathbf{a}|, \quad |AC| = k|AB|. \quad (7.11)$$

Из соотношений (7.11) выводим равенство

$$|AC| = k(q|\mathbf{a}|) = (kq)|\mathbf{a}|. \quad (7.12)$$

Равенство (7.12) вместе с  $\overrightarrow{AC} \parallel \mathbf{a}$  и  $kq > 0$  даёт  $\overrightarrow{AC} = (kq) \cdot \mathbf{a}$ . Но  $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$  по построению. Отсюда немедленно получается требуемое равенство  $(kq) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 7.4.** Докажите равенство  $(kq) \cdot \mathbf{a} = k \cdot (q \cdot \mathbf{a})$  для случая, когда  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , а числа  $k$  и  $q$  разных знаков. Для этого разберите отдельно следующие два подслучая:

- 1)  $k > 0$  и  $q < 0$ ;
- 2)  $k < 0$  и  $q > 0$ .

Последний восьмой пункт в теореме 7.1 тривиален. Он вытекает непосредственно из определения 6.1.

### § 8. Векторные выражения и их преобразование.

Перечисленные в теореме 7.1 свойства алгебраических операций с векторами используются для преобразования векторных выражений. Под векторным выражением обычно понимается формула, в результате вычисления по которой получается некоторый вектор. В этом параграфе мы рассмотрим примеры векторных выражений и разберём некоторые способы их преобразований.

Пусть задано несколько векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Можно записать сумму этих векторов, по разному расставив скобки:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_3 + (\mathbf{a}_4 + \dots + (\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n) \dots)), \\ & (\dots(((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3) + \mathbf{a}_4) + \dots + \mathbf{a}_{n-1}) + \mathbf{a}_n). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Способов расстановки скобок очень много. Формулы (8.1) демонстрируют лишь два из них. Однако, несмотря на это разнообразие, в силу свойства ассоциативности сложения векторов (пункт 2 в теореме 7.1) все выражения типа (8.1), отличающиеся лишь расстановкой скобок, дают один и тот же результат. По этой причине сумму векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  можно записать вообще без скобок:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \dots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n. \quad (8.2)$$

Для дальнейшего сокращения формулы (8.2) применяют знак суммы. Это выглядит следующим образом:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i. \quad (8.3)$$

Буква  $i$  играет в формуле (8.3) роль переменной цикла в цикле суммирования. Её называют *индексом суммирования*. Она последовательно пробегает все целочисленные значения от  $i = 1$  до  $i = n$ . Сама сумма (8.3) от переменной  $i$  не

зависит. Букву  $i$  в формуле (8.3) можно заменить любой другой буквой, например, буквой  $j$  или буквой  $k$ :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k. \quad (8.4)$$

Приём с заменой (переобозначением) индекса суммирования, использованный в (8.4), часто применяется при преобразовании выражений с суммами.

Свойство коммутативности сложения векторов (пункт 1 в теореме 7.1) позволяет менять порядок слагаемых в суммах векторов. Например, в сумме (8.2) мы можем записать

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n-1} + \dots + \mathbf{a}_1.$$

Чаще всего коммутативность сложения векторов применяется для смены порядка суммирования в кратных суммах. Пусть задана некоторая совокупность векторов  $\mathbf{a}_{ij}$ , пронумерованная двумя индексами  $i$  и  $j$ , где  $i = 1, \dots, m$  и  $j = 1, \dots, n$ . Тогда имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_{ij}, \quad (8.5)$$

которое вытекает из свойства коммутативности сложения векторов. В то же самое время имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji}, \quad (8.6)$$

которое получается простым переобозначением индексов. Оба способа преобразования кратных сумм (8.5) и (8.6) находят применение при работе с векторами.

Третий пункт теоремы 7.1 описывает свойство нулевого вектора. Это свойство часто используется в вычислениях.

Если сумма части слагаемых в формуле (8.3) равна нулю, например, если выполняется равенство

$$\mathbf{a}_{k+1} + \dots + \mathbf{a}_n = \sum_{i=k+1}^n \mathbf{a}_i = \mathbf{0},$$

то саму сумму (8.3) можно преобразовать так:

$$\mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_k.$$

Четвёртый пункт теоремы 7.1 декларирует существование противоположного вектора  $\mathbf{a}'$  для всякого вектора  $\mathbf{a}$ . Это обстоятельство позволяет определить вычитание векторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1.** Разностью векторов  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  называется сумма вектора  $\mathbf{a}$  с вектором  $\mathbf{b}'$ , который противоположен вектору  $\mathbf{b}$ . Этот факт записывают в виде равенства

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}'. \quad (8.7)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 8.1.** Используя определения 6.1 и 8.1, покажите, что противоположный вектор  $\mathbf{a}'$  получается из вектора  $\mathbf{a}$  умножением на число  $-1$ , т. е.

$$\mathbf{a}' = (-1) \cdot \mathbf{a}. \quad (8.8)$$

В силу (8.8) вектор  $\mathbf{a}'$ , противоположный вектору  $\mathbf{a}$ , обозначают через  $-\mathbf{a}$  и записывают  $\mathbf{a}' = -\mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a}$ .

Свойства дистрибутивности умножения векторов на числа (пункты 5 и 6 в теореме 7.1) используют для раскрытия скобок и группировки подобных слагаемых:

$$\alpha \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha \cdot \mathbf{a}_i, \quad (8.9)$$

$$\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{a}. \quad (8.10)$$

Преобразования, подобные (8.9) и (8.10), можно встретить в различных вычислениях с векторами.

**УПРАЖНЕНИЕ 8.2.** *Используя соотношения (8.7) и (8.8), докажите следующие свойства операции вычитания:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{a} &= \mathbf{0}; & (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}); \\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c}); & (\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{c} &= \mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}); \\ \alpha \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= \alpha \cdot \mathbf{a} - \alpha \cdot \mathbf{b}; & (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{a} &= \alpha \cdot \mathbf{a} - \beta \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — векторы, а  $\alpha$  и  $\beta$  — числа.

Свойство ассоциативности операции умножения векторов на числа (пункт 7 в теореме 7.1) находит применение при раскрытии скобок. Вот пример такого использования:

$$\beta \cdot \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i \right) = \sum_{i=1}^n \beta \cdot (\alpha_i \cdot \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i) \cdot \mathbf{a}_i. \quad (8.11)$$

В кратных суммах это свойство используется совместно со свойством коммутативности умножения чисел на числа:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbf{a}_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathbf{a}_{ij} \right).$$

**Примечание.** Важно отметить, что именно в силу свойства ассоциативности умножения векторов на числа мы можем опускать знак умножения в виде точки при записи произведения числа и вектора:

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a}.$$



Ниже я буду использовать обе формы записи произведения вектора на число, руководствуясь соображениями смысловой ясности, краткости и эстетического вида формул.

Последний восьмой пункт теоремы 7.1 выражает свойство числовой единицы в виде соотношения  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ . Это свойство используется при группировке подобных слагаемых и выделении общего множителя. Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + 3 \cdot \mathbf{b} + 2 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{a} + 2 \cdot \mathbf{a} + 3 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} = 1 \cdot \mathbf{a} + 2 \cdot \mathbf{a} + \\ &+ 3 \cdot \mathbf{b} + 1 \cdot \mathbf{b} = (1 + 2) \cdot \mathbf{a} + (3 + 1) \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot \mathbf{a} + 4 \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

**УПРАЖНЕНИЕ 8.3.** *Используя соотношение  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ , докажите, что из  $\alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$  при  $\alpha \neq 0$  вытекает  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .*

### § 9. Линейные комбинации. Тривиальность, нетривиальность и равенство нулю.

Пусть задана некоторая совокупность из  $n$  свободных векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Можно называть её множеством из  $n$  векторов, но чаще используется термин «система векторов».

Используя операции сложения векторов и умножения их на числа, можно составить некоторое векторное выражение из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . В нём, скорее всего, будут присутствовать суммы векторов, взятые с некоторыми числовыми коэффициентами.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1.** Выражение вида  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$ , составленное из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , называется *линейной комбинацией* этих векторов. Числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  называются *коэффициентами линейной комбинации*. Если

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \tag{9.1}$$

то вектор  $\mathbf{b}$  называется *значением линейной комбинации*.

В сложных векторных выражениях линейные комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  могут умножаться на числа и складыв-

ваться с другими линейными комбинациями, также умноженными на числа. Затем эти суммы могут вновь умножаться на числа и складываться с другими суммами такого рода, также умноженными на числа. Этот процесс может повторяться несколько раз. Однако, после раскрытия скобок с применением формулы (8.11) и после приведения подобных слагаемых с применением формулы (8.10) все подобные сложные векторное выражения сведутся к линейным комбинациям векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Зафиксируем этот факт в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 9.1.** *Всякое векторное выражение, составленное из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  при помощи операций сложения и умножения на числа, может быть преобразовано к некоторой линейной комбинации этих векторов.*

Значение линейной комбинации не зависит порядка слагаемых в ней. По этой причине сами линейные комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , отличающиеся лишь порядком слагаемых, мы будем считать совпадающими. Например, выражения  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$  и  $\alpha_n \mathbf{a}_n + \dots + \alpha_1 \mathbf{a}_1$  будут считаться задающими одну и ту же линейную комбинацию.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2.** Линейная комбинация  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$ , составленная из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , называется *тривиальной*, если все её коэффициенты равны нулю, т. е. если  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3.** Линейная комбинация  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$ , составленная из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , называется *равной нулю*, если её значение равно нулевому вектору, т. е. если  $\mathbf{b}$  в (9.1) равен нулю.

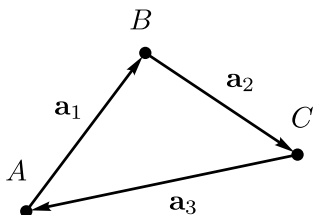


Рис. 9.1

Всякая тривиальная линейная комбинация равна нулю. Однако, обратное неверно. Не всякая равная нулю линейная комбинация тривиальна. На

рисунке 9.1 изображён треугольник  $ABC$ . На его сторонах отмечены векторы  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{BC}$  и  $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{CA}$ . По построению сумма этих трёх векторов равна нулю:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}. \quad (9.2)$$

Равенство (9.2) можно записать так:

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2 + 1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \quad (9.3)$$

Легко видеть, что линейная комбинация в левой части равенства (9.3) не является тривиальной (см. определение 9.2), однако, она равна нулю в соответствии с определением 9.3.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4.** Линейная комбинация  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$ , составленная из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , называется *нетривиальной*, если она не является тривиальной, т. е. если среди её коэффициентов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  есть по крайней мере один коэффициент, не равный нулю.

## § 10. Линейная зависимость и линейная независимость.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1.** Система векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая равна нулю.

Примером линейно зависимой системы векторов могут служить вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , изображённые на рисунке 9.1.

Важно отметить, что свойство линейной зависимости является свойством систем векторов, а не свойством их линейных комбинаций. Линейные комбинации в определении 10.1 являются лишь средством выявления линейной зависимости.

Важно также отметить, что свойство линейной зависимости, если оно имеется у системы векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , не зависит от порядка перечисления векторов в этой системе.

Это вытекает из того факта, что значение всякой линейной комбинации, а также её тривиальность или нетривиальность, не меняются при перестановке слагаемых в ней.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2.** Система векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой в смысле определения 10.1, т. е. если не существует линейной комбинации этих векторов, которая была бы одновременно нетривиальной и равной нулю.

Доказать существование линейной комбинации с нужными свойствами в определении 10.1 можно, указав пример такой линейной комбинации. Доказать же несуществование в определении 10.2 сложнее. По этой причине используется следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 10.1 (критерий линейной независимости).** Система векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  является линейно независимой в том и только в том случае, когда из равенства нулю линейной комбинации этих векторов вытекает её тривиальность.

**ДОК-ВО.** Доказательство строится на простом логическом рассуждении. Действительно, несуществование линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , которая была бы одновременно нетривиальной и равной нулю, равносильно тому, что равенство нулю линейной комбинации этих векторов всякий раз с неизбежностью должно приводить к её тривиальности. То есть из равенства нулю линейной комбинации этих векторов вытекает её тривиальность. Теорема 10.1 доказана.  $\square$

**ТЕОРЕМА 10.2.** Система векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  является линейно независимой в том и только в том случае, когда из нетривиальности линейной комбинации этих векторов вытекает то, что она не равна нулю.

Теорема 10.2 очень похожа на теорему 10.1. Но она менее популярна и реже используется.

УПРАЖНЕНИЕ 10.1. Докажите теорему 10.2, используя для этого аналогию с теоремой 10.1.

### § 11. Свойства линейной зависимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Говорят, что вектор  $\mathbf{b}$  выражается в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , если он является значением некоторой линейной комбинации, составленной из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  (см. (9.1)). В этой ситуации для краткости речи иногда говорят, что вектор  $\mathbf{b}$  линейно выражается через вектора  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  или линейным образом выражается через вектора  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ .

Принято выделять пять основных свойств линейной зависимости векторов. Сформулируем их в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 11.1. Отношение линейной зависимости векторов обладает следующими основными свойствами:

- 1) система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;
- 2) система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима;
- 3) если система векторов линейно зависима, то хотя бы один из этих векторов линейно выражается через остальные;
- 4) если система векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно независима, а добавление вектора  $\mathbf{a}_{n+1}$  делает её линейно зависимой, то вектор  $\mathbf{a}_{n+1}$  линейно выражается через  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ ;
- 5) если вектор  $\mathbf{b}$  линейно выражается через  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ , а каждый из векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  линейно выражается через вектора  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ , то вектор  $\mathbf{b}$  линейно выражается через вектора  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ .

Свойства 1)–5) в теореме 11.1 достаточно просты. Их доказательства чисто алгебраические, они не требуют использования рисунков. Я не стану приводить этих доказательств, поскольку читатель может найти их в § 3 главы I в книге [1].

Помимо перечисленных в теореме 11.1 свойств 1)–5) имеется ещё одно шестое свойство линейной зависимости векторов, которое формулируется отдельно.

**ТЕОРЕМА 11.2 (Штейниц).** *Если вектора  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно независимы и если каждый из этих векторов линейно выражается через вектора  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ , то  $m \geq n$ .*

Теорема Штейница 11.2 важна при изучении многомерных пространств. При изучении трёхмерного пространства  $\mathbb{E}$  в этой книге она нам не потребуется.

## § 12. Линейная зависимость при $n = 1$ .

Рассмотрим систему, состоящую из одного единственного вектора  $\mathbf{a}_1$ , и применим к ней определение линейной зависимости 10.1. Линейная зависимость такой системы из одного вектора  $\mathbf{a}_1$  означает, что существует составленная из этого вектора нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}. \quad (12.1)$$

Нетривиальность линейной комбинации в левой части равенства (12.1) означает  $\alpha_1 \neq 0$ . В силу  $\alpha_1 \neq 0$  из (12.1) выводим

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

(см. упражнение 8.3). Таким образом, линейная зависимость системы из одного единственного вектора  $\mathbf{a}_1$  даёт  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ .

Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть выполнено равенство (12.2). Запишем его так:

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}. \quad (12.3)$$

Левая часть равенства (12.3) есть нетривиальная линейная комбинация для системы из одного вектора  $\mathbf{a}_1$ , равная нулю. Её существование означает, что такая система из одного

вектора линейно зависима. Полученный результат запишем в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 12.1.** Система, состоящая из одного единственного вектора  $\mathbf{a}_1$ , линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой, т. е.  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ .

### § 13. Линейная зависимость при $n = 2$ . Коллинеарность векторов.

Рассмотрим систему, состоящую из двух векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Применяя к ней определение линейной зависимости 10.1, получим существование составленной из этих векторов нетривиальной линейной комбинации, которая равна нулю:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \quad (13.1)$$

Нетривиальность линейной комбинации в левой части равенства (13.1) означает, что  $\alpha_1 \neq 0$  или  $\alpha_2 \neq 0$ . Поскольку линейная зависимость не чувствительна к порядку нумерации векторов в системе, мы можем считать, что  $\alpha_1 \neq 0$ . Тогда равенство (13.1) можно переписать в виде

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{a}_2. \quad (13.2)$$

Обозначим  $\beta_2 = -\alpha_2/\alpha_1$  и запишем (13.2) в виде

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2 \mathbf{a}_2. \quad (13.3)$$

Отметим, что соотношение (13.3) можно было вывести также и из третьего пункта в теореме 11.1.

Согласно (13.3) вектор  $\mathbf{a}_1$  получается из вектора  $\mathbf{a}_2$  умножением на число  $\beta_2$ . При умножении вектора на число обычно меняется его длина (см. формулы (6.1), (6.2), (6.3), а также рисунки 6.1, 6.2 и 6.3). Что же касается его направления, оно сохраняется либо меняется на противоположное. В любом из

этих двух случаев вектор  $\beta_2 \mathbf{a}_2$  параллелен вектору  $\mathbf{a}_2$ . При  $\beta_2 = 0$  вектор  $\beta_2 \mathbf{a}_2$  оказывается нулевым. Такой вектор не имеет собственного направления и признается параллельным любому другому вектору. В результате приведённых рассуждений из равенства (13.3) выводим соотношение

$$\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2. \quad (13.4)$$

В случае векторов для обозначения их параллельности часто используется специальный термин — *коллинеарность*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1.** Два свободных вектора  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  называются *коллинеарными*, если их геометрические реализации параллельны некоторой прямой, общей для них обоих.

Как мы увидели выше, в случае двух векторов из их линейной зависимости вытекает коллинеарность этих векторов. Верно и обратное утверждение. Пусть выполнено соотношение (13.4). Если оба вектора  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  нулевые, то для них выполнено равенство (13.3), в котором можно положить  $\beta_2 = 1$ . Если же по крайней мере один из этих векторов отличен от нулевого, то за счёт возможной перемены нумерации можно считать, что  $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ . Затем, выбрав геометрические реализации  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AC}$ , можно подобрать коэффициент  $\beta_2$ , исходя из рисунков 6.1, 6.2 или 6.3 и из формул (6.1), (6.2), (6.3), так, что и в этом случае будет выполнено равенство (13.3). Само же равенство (13.3) запишем так:

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 + (-\beta_2) \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \quad (13.5)$$

Поскольку  $1 \neq 0$ , левая часть равенства (13.5) — это нетривиальная линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , равная нулю. Существование такой линейной комбинации означает, что вектора  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  линейно зависимы. Обратное утверждение о том, что из коллинеарности двух векторов вытекает их линейная зависимость, доказано.



Соединив доказанные выше прямое и обратное утверждения, можно сформулировать их в виде одной теоремы.

**ТЕОРЕМА 13.1.** Система, состоящая из двух векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны, т. е.  $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$ .

### § 14. Линейная зависимость при $n = 3$ . Компланарность векторов.

Рассмотрим систему, состоящую из трёх векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ . Предположим, что она линейно зависима. Применяя

к ней третий пункт из теоремы 11.1, получим, что один из трёх векторов системы линейно выражается через два других. Помня о возможной перенумерации векторов, мы можем считать, что вектор  $\mathbf{a}_1$  выражается через  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ :

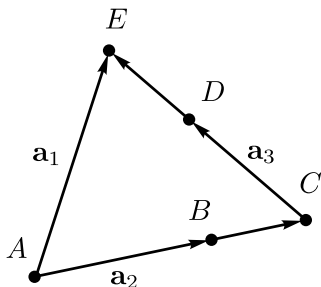


Рис. 14.1

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2 \mathbf{a}_2 + \beta_3 \mathbf{a}_3. \quad (14.1)$$

Пусть  $A$  — некоторая произвольная точка пространства  $\mathbb{E}$ . Построим геометрические реализации векторов  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{AB}$  и  $\beta_2 \mathbf{a}_2 = \overrightarrow{AC}$ . Затем от точки  $C$  отложим геометрические реализации векторов  $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{CD}$  и  $\beta_3 \mathbf{a}_3 = \overrightarrow{CE}$ . Вектора  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{CE}$  образуют две стороны треугольника  $ACE$  (см. рисунок 14.1). Тогда сумма векторов (14.1) будет представлена третьей стороной  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AE}$ .

Треугольник  $ACE$  — плоская фигура. Геометрические реализации векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  лежат на сторонах этого треугольника. Поэтому они принадлежат плоскости  $ACE$ . Вместо  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AE}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{CD}$  мы можем при помощи параллельного переноса построить другие геометрические

реализации этих трёх векторов. Они уже не будут лежать в плоскости  $ACE$ , но сохраняют параллельность этой плоскости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1.** Три свободных вектора  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  называются *компланарными*, если их геометрические реализации параллельны некоторой плоскости, общей для всех трёх.

**ЛЕММА 14.1.** Из линейной зависимости трёх векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  вытекает их компланарность.

**УПРАЖНЕНИЕ 14.1.** Приведённые выше рассуждения дают вывод леммы 14.1 из формулы (14.1) в случае, когда

$$\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_2 \nparallel \mathbf{a}_3. \quad (14.2)$$

Рассмотрите специальные случаи, когда одно или несколько условий (14.2) не выполнено и выведите лемму 14.1 из формулы (14.1) в этих специальных случаях.

**ЛЕММА 14.2.** Из компланарности трёх векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  вытекает их линейная зависимость.

**ДОК-ВО.** Если  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ , то утверждение леммы 14.2 вытекает из первого пункта теоремы 11.1. Если

$\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{a}_3$ , то утверждение леммы 14.2 вытекает из теоремы 13.1 и второго пункта теоремы 11.1. Поэтому для доказательства леммы 14.2 остается рассмотреть случай, когда выполнены все три условия (14.2).

Пусть  $A$  — некоторая произвольная точка пространства  $\mathbb{E}$ .

Отложим от точки  $A$  геометрические реализации векторов  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AD}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{AC}$  и  $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{AB}$  (см. рисунок 14.2). В силу компланарности векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$

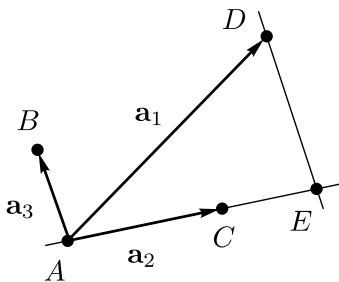


Рис. 14.2

и  $\mathbf{a}_3$  их геометрические реализации  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  лежат в одной плоскости. Обозначим эту плоскость через  $\alpha$ . Проведём через точку  $D$  прямую, параллельную вектору  $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ . Такая прямая лежит в плоскости  $\alpha$ . Эта прямая пересекается с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{a}_2$ , в единственной точке  $E$ , поскольку  $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{a}_2 \nparallel \mathbf{a}_3$ . Из рассмотрения точек  $A$ ,  $E$  и  $D$  на рисунке 14.2 извлекаем равенство

$$\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}. \quad (14.3)$$

Вектор  $\overrightarrow{AE}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ , с которым они лежат на одной прямой. Поэтому найдётся число  $\beta_2$ , такое, что  $\overrightarrow{AE} = \beta_2 \mathbf{a}_2$ . Вектор  $\overrightarrow{ED}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ , поскольку они лежат на параллельных прямых. Отсюда  $\overrightarrow{ED} = \beta_3 \mathbf{a}_3$  для некоторого числа  $\beta_3$ . После подстановки полученных соотношений

$$\overrightarrow{AE} = \beta_2 \mathbf{a}_2, \quad \overrightarrow{ED} = \beta_3 \mathbf{a}_3$$

в равенство (14.3) это равенство приводится к виду (14.1).

Последний шаг в доказательстве леммы 14.2 состоит в том, чтобы записать равенство (14.1) в виде

$$1 \cdot \mathbf{a}_1 + (-\beta_2) \cdot \mathbf{a}_2 + (-\beta_3) \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \quad (14.4)$$

Поскольку  $1 \neq 0$ , левая часть равенства (14.4) — это нетривиальная линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ , равная нулю. Существование такой линейной комбинации означает, что вектора  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  линейно зависимы.  $\square$

Из лемм 14.1 и 14.2 вытекает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 14.1.** Система, состоящая из трёх векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$ , линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

### § 15. Линейная зависимость при $n \geq 4$ .

**ТЕОРЕМА 15.1.** *Всякая система, состоящая из четырёх векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  в пространстве  $\mathbb{E}$ , линейно зависима.*

**ТЕОРЕМА 15.2.** *Всякая система, содержащая более четырёх векторов в пространстве  $\mathbb{E}$ , линейно зависима.*

Теорема 15.2 вытекает из теоремы 15.1 в силу третьего пункта из теоремы 11.1. Поэтому достаточно доказать теорему 15.1. Сама же теорема 15.1 выражает свойство трёхмерности пространства  $\mathbb{E}$ .

**ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 15.1.** Выделим из системы векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  подсистему, состоящую из трёх векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ . Если эти три вектора линейно зависимы, то доказатель-

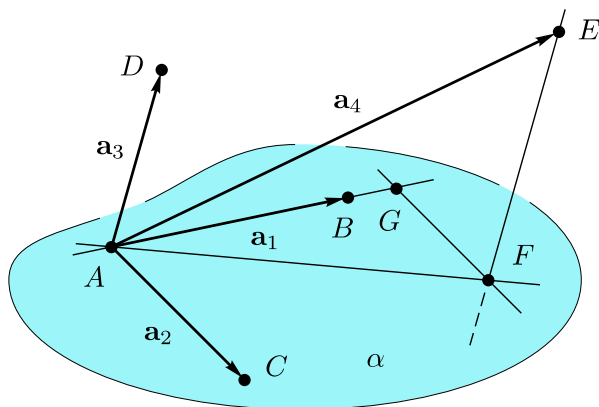


Рис. 15.1

ство линейной зависимости векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  сведётся к применению третьего пункта теоремы 11.1. Поэтому в дальнейшем мы можем ограничиться случаем, когда вектора  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  линейно независимы.

Из линейной независимости векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  согласно теореме 14.1 вытекает некомпланарность этих векторов. Бо-

лее того, из линейной независимости векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  в силу третьего пункта теоремы 11.1 вытекает линейная независимость любой меньшей подсистемы, входящей в систему их этих трёх векторов. В частности, исключается зануление векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  и исключается коллинеарность векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_1$  (см. теоремы 12.1 и 13.1), т. е.

$$\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2. \quad (15.1)$$

Пусть  $A$  — некоторая произвольная точка пространства  $\mathbb{E}$ . Отложим от точки  $A$  геометрические реализации всех четырёх векторов  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{AC}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{AD}$ ,  $\mathbf{a}_4 = \overrightarrow{AE}$ . В силу условия  $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$  в (15.1) вектора  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  задают плоскость (см. рисунок 15.1). Обозначим её через  $\alpha$ . Вектор  $\overrightarrow{AD}$  не лежит в плоскости  $\alpha$  и не параллелен ей в силу некомпланарности векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ .

Проведём из конца вектора  $\mathbf{a}_4 = \overrightarrow{AE}$  прямую, параллельную вектору  $\mathbf{a}_3$ . Поскольку  $\mathbf{a}_3 \nparallel \alpha$ , эта прямая пересекает плоскость  $\alpha$  в единственной точке  $F$  и имеет место равенство

$$\mathbf{a}_4 = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}. \quad (15.2)$$

Теперь проведём через точку  $F$  прямую, параллельную вектору  $\mathbf{a}_2$ . Такая прямая лежит в плоскости  $\alpha$  и в силу  $\mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2$  пересекает прямую  $AB$  в единственной точке  $G$ . Отсюда

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF}. \quad (15.3)$$

Заметим, что вектор  $\overrightarrow{AG}$  лежит на той же прямой, что и вектор  $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{AB}$ , причем по условиям (15.1) имеем  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ . Значит найдётся число  $\beta_1$ , такое, что  $\overrightarrow{AG} = \beta_1 \mathbf{a}_1$ . Аналогичным образом из  $\overrightarrow{GF} \parallel \mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$  выводим  $\overrightarrow{GF} = \beta_2 \mathbf{a}_2$  для некоторого числа  $\beta_2$ , а из условий  $\overrightarrow{FE} \parallel \mathbf{a}_3$  и  $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$  получаем,

что  $\overrightarrow{FE} = \beta_3 \mathbf{a}_3$  для некоторого числа  $\beta_3$ . Остаётся подставить полученные для векторов  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{GF}$  и  $\overrightarrow{FE}$  выражения в формулы (15.3) и (15.2). Это даёт

$$\mathbf{a}_4 = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \beta_3 \mathbf{a}_3. \quad (15.4)$$

Равенство (15.4) можно переписать следующим образом:

$$1 \cdot \mathbf{a}_4 + (-\beta_1) \cdot \mathbf{a}_1 + (-\beta_2) \cdot \mathbf{a}_2 + (-\beta_3) \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \quad (15.5)$$

Поскольку  $1 \neq 0$ , левая часть равенства (15.5) — это нетривиальная линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  и  $\mathbf{a}_4$ , которая равна нулю. Существование такой линейной комбинации означает, что вектора  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{a}_4$  линейно зависимы. Это завершает доказательство теоремы 15.1.  $\square$

### § 16. Базисы на прямой.

Пусть  $a$  — некоторая прямая в пространстве  $\mathbb{E}$ . Рассмотрим все свободные вектора, параллельные прямой  $a$ . Они имеют геометрические реализации, целиком лежащие на прямой  $a$ . Ограничив свободу перемещения таких векторов, т. е. запретив строить геометрические реализации за пределами прямой  $a$ , можно говорить о (частично) свободных векторах, лежащих на прямой  $a$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1.** *Базисом на прямой  $a$  называется система, состоящая из одного ненулевого вектора  $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ , лежащего на этой прямой. При этом вектор  $\mathbf{e}$  называется базисным вектором данного базиса.*

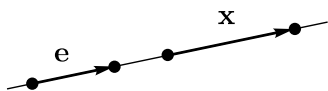


Рис. 16.1

Пусть  $\mathbf{e}$  — базисный вектор некоторого базиса на прямой  $a$  и пусть  $\mathbf{x}$  — некоторый другой вектор, лежащий на этой прямой (см. рисунок 16.1). Тогда

$\mathbf{x} \parallel \mathbf{e}$  и потому существует число  $x$ , такое что

$$\mathbf{x} = x \mathbf{e}. \quad (16.1)$$

Число  $x$  в формуле (16.1) называется *координатой* вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{e}$ , а сама формула (16.1) называется *разложением* вектора  $\mathbf{x}$  по этому базису.

При записи координат векторов, которые извлекаются из их разложений по базису (16.1), их принято окружать двойными вертикальными линиями с двух сторон:

$$\mathbf{x} \mapsto \|\|x\|. \quad (16.2)$$

При этом они превращаются в матрицы (см. [7]). Отображение (16.2) реализует основную идею аналитической геометрии — переход от геометрических объектов к их числовому описанию. Средством для такого перехода здесь служит базис.

### § 17. Базисы на плоскости.

Пусть  $\alpha$  — некоторая плоскость в пространстве  $\mathbb{E}$ . Рассмотрим все свободные вектора, параллельные плоскости  $\alpha$ . Они имеют геометрические реализации, целиком лежащие на плоскости  $\alpha$ . Ограничив свободу перемещения таких векторов, т. е. запретив строить геометрические реализации за пределами плоскости  $\alpha$ , можно говорить о (частично) свободных векторах, лежащих на плоскости  $\alpha$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17.1.** *Базисом на плоскости  $\alpha$*  называется упорядоченная система, состоящая из двух неколлинеарных векторов  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , лежащих на этой плоскости. При этом вектора  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  называются базисными векторами данного базиса.

В определении 17.1 использован термин *упорядоченная система векторов*. Этим термином обозначается система векторов, в которой важен порядок векторов:  $\mathbf{e}_1$  — первый вектор,  $\mathbf{e}_2$  — второй вектор. Если переставить векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  и

считать  $\mathbf{e}_2$  первым вектором, а  $\mathbf{e}_1$  — вторым, то это будет уже другой базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ , отличный от базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_1.$$

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — базис на плоскости  $\alpha$  и пусть  $\mathbf{x}$  — некоторый вектор, лежащий на этой плоскости. Выберем некоторую произвольную точку  $O \in \alpha$  и отложим от этой точки геометрические реализации всех трёх векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{x}$ :

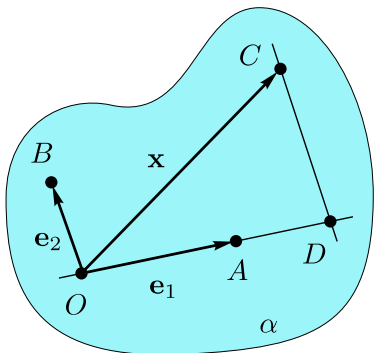


Рис. 17.1

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \overrightarrow{OA}, \\ \mathbf{e}_2 &= \overrightarrow{OB}, \\ \mathbf{x} &= \overrightarrow{OC}. \end{aligned} \quad (17.1)$$

В силу нашего выбора векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}$  и в силу того, что  $O \in \alpha$ , все геометрические реализации (17.1) лежат в плоскости  $\alpha$ . Проведём через конец вектора  $\mathbf{x}$ , т. е. через точку  $C$ , прямую, параллельную вектору  $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ . В силу неколлинеарности базисных векторов  $\mathbf{e}_1 \nparallel \mathbf{e}_2$  такая прямая пересечёт прямую, на которой лежит вектор  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ , в некоторой единственной точке  $D$  (см. рисунок 17.1). Это даёт

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}. \quad (17.2)$$

Вектор  $\overrightarrow{OD}$  в (17.2) коллинеарен с вектором  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ , а вектор  $\overrightarrow{DC}$  по построению коллинеарен вектору  $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$ . По этой причине найдутся два числа  $x_1$  и  $x_2$ , такие, что

$$\overrightarrow{OD} = x_1 \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{DC} = x_2 \mathbf{e}_2. \quad (17.3)$$



После подстановки (17.3) в (17.2) с учётом (17.1) получаем

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2. \quad (17.4)$$

Формула (17.4) аналогична формуле (16.1). Числа  $x_1$  и  $x_2$  называются *координатами* вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , а сама формула (17.4) называется *разложением* вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе. При записи координат вектора их принято располагать в столбик одну под другой и окружать с двух сторон двойными вертикальными линиями

$$\mathbf{x} \mapsto \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\|. \quad (17.5)$$

Столбик из чисел  $x_1$  и  $x_2$  в (17.5) называется *координатным столбцом* вектора  $\mathbf{x}$ .

## § 18. Базисы в пространстве.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1.** *Базисом в пространстве  $\mathbb{E}$  называется упорядоченная система, состоящая из трёх некопланарных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .*

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый базис в пространстве  $\mathbb{E}$  и пусть  $\mathbf{x}$  — некоторый вектор. Выберем некоторую произвольную точку  $O$  и отложим от этой точки геометрические реализации всех четырёх векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}, & \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}, \\ \mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OC}, & \mathbf{x} = \overrightarrow{OD}. \end{array} \quad (18.1)$$

Вектора  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  неколлинеарны, поскольку иначе вся тройка  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  была бы некопланарной. По этой причине вектора  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB}$  определяют плоскость (она обозначена через  $\alpha$  на рисунке 18.1) и лежат в этой плоскости. Вектор

$\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OC}$  в этой плоскости не лежит и этой плоскости не параллелен. На рисунке 18.1 он изображён выходящим за пределы плоскости  $\alpha$ .

Проведём через конец вектора  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OD}$  прямую, параллельную вектору  $\mathbf{e}_3$ . Такая прямая не параллельна плоскости  $\alpha$  поскольку  $\mathbf{e}_3 \not\parallel \alpha$ . Она пересекает плоскость  $\alpha$  в некоторой однозначно определённой точке  $E$ . Это даёт

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}. \quad (18.2)$$

Теперь через точку  $E$  проведём прямую, параллельную вектору  $\mathbf{e}_2$ . Вектора  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  в (18.1) неколлинеарны. По этой причине такая прямая пересечёт прямую, на которой лежит вектор  $\mathbf{e}_1$  в некоторой однозначно определённой точке  $F$ . Из рассмотрения последовательности точек  $O, F, E$  выводится равенство

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FE}. \quad (18.3)$$

Объединив равенства (18.3) и (18.2), получаем

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}. \quad (18.4)$$

Заметим, что в соответствии с выполненными построениями выполнены следующие условия коллинеарности векторов

$$\overrightarrow{OF} \parallel \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{FE} \parallel \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{ED} \parallel \mathbf{e}_3. \quad (18.5)$$

Из условия коллинеарности  $\overrightarrow{OF} \parallel \mathbf{e}_1$  в (18.5) вытекает существование числа  $x_1$ , такого, что  $\overrightarrow{OF} = x_1 \mathbf{e}_1$ . Из остальных

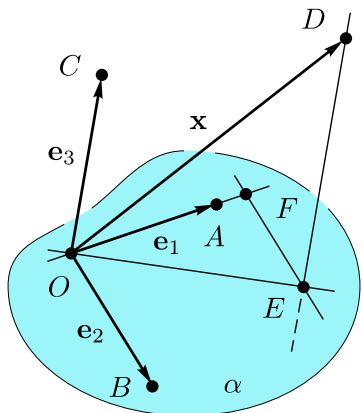


Рис. 18.1

двух условий коллинеарности в (18.5) вытекает существование чисел  $x_2$  и  $x_3$ , таких, что  $\overrightarrow{FE} = x_2 \mathbf{e}_2$ ,  $\overrightarrow{ED} = x_3 \mathbf{e}_3$ . В результате этого равенство (18.4) преобразуется к виду

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (18.6)$$

Формула (18.6) аналогична формулам (16.1) и (17.4). Числа  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  называются *координатами* вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ , а сама формула (18.6) называется *разложением* вектора  $\mathbf{x}$  в этом базисе. При записи координат вектора их принято располагать в столбик одну под другой и окружать с двух сторон двойными вертикальными линиями:

$$\mathbf{x} \mapsto \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\|. \quad (18.7)$$

Столбик из чисел  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  в (18.7) называется *координатным столбцом* вектора  $\mathbf{x}$ .

### § 19. Единственность разложения вектора по базису.

Пусть  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  — некоторый базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Построения, изображённые на рисунке 18.1, позволяют для любого вектора  $\mathbf{x}$  получить разложение (18.6) этого вектора по базису  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ . Однако эти построения не единственный способ разложения вектора по базису. Например, вместо плоскости  $OAB$  в качестве  $\alpha$  можно взять плоскость  $OAC$ , а прямую  $DE$  направить параллельно вектору  $\mathbf{e}_2$ . Затем прямая  $EF$  направляется параллельно вектору  $\mathbf{e}_3$  и точка  $F$  получается в её пересечении с прямой  $OA$ , на которой лежит геометрическая реализация вектора  $\mathbf{e}_1$ . Такие построения потенциально могли бы дать иное разложение вектора  $\mathbf{x}$  по базису  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ , т. е. отличающееся от (18.6) коэффициентами. Тот факт, что этого не происходит, требует доказательства.

**ТЕОРЕМА 19.1.** *Разложение всякого вектора  $\mathbf{x}$  по заданному базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  определяется этим вектором однозначно.*

**ДОК-ВО.** Докажем методом от противного. Допустим, что, помимо разложения (18.6), имеется ещё одно разложение вектора  $\mathbf{x}$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{x} = \tilde{x}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{x}_2 \mathbf{e}_2 + \tilde{x}_3 \mathbf{e}_3. \quad (19.1)$$

Вычтем разложение (18.6) из разложения (19.1). После приведения подобных слагаемых получим:

$$(\tilde{x}_1 - x_1) \mathbf{e}_1 + (\tilde{x}_2 - x_2) \mathbf{e}_2 + (\tilde{x}_3 - x_3) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad (19.2)$$

Согласно определению 18.1 базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — это тройка некопланарных векторов. В силу теоремы 14.1 такая тройка векторов линейно независима. Теперь воспользуемся тем, что (19.2) — это линейная комбинация базисных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , равная нулю. Применив теорему 10.1, заключаем, что эта линейная комбинация тривиальна, т. е.

$$\tilde{x}_1 - x_1 = 0, \quad \tilde{x}_2 - x_2 = 0, \quad \tilde{x}_3 - x_3 = 0. \quad (19.3)$$

Равенства (19.3) означают, что коэффициенты в разложениях вектора  $\mathbf{x}$  (19.1) и (18.6) совпадают, что противоречит допущению о том, что эти разложения различны. Полученное противоречие доказывает теорему.  $\square$

**УПРАЖНЕНИЕ 19.1.** *По аналогии с теоремой 19.1 сформулируйте и докажите теоремы о единственности разложения векторов для базисов на плоскости и базисов на прямой.*

## § 20. Соглашение о расстановке индексов

Теорема 19.1 о единственности разложения вектора по базису означает, что отображение (18.7), сопоставляющее векторам их координаты в некотором фиксированном базисе,

является взаимно-однозначным. Это обстоятельство делает базисы важным инструментом для количественного описания геометрических объектов. Существенное улучшение этого инструмента было достигнуто после принятия соглашения о расстановке индексов. Это соглашение известно как эйнштейновская тензорная нотация.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.1.** *Соглашение о расстановке индексов*, известное как *эйнштейновская тензорная нотация* (Einstein's tensorial notation), — это свод правил, определяющих расположение индексов при записи числовых массивов, которыми представляются различные геометрические объекты после выбора базиса или системы координат.

Эйнштейновская тензорная нотация не является закрытым списком правил. При появлении новых типов геометрических объектов в науке этот список дополняется новыми правилами расстановки индексов. По этой причине, я буду формулировать правила, составляющие соглашение о расстановке индексов, по мере необходимости.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.2.** Базисные вектора принято нумеровать нижними индексами, а координаты векторов принято нумеровать верхними индексами.

Правило, сформулированное в определении 20.2, входит в состав эйнштейновской тензорной нотации. В соответствии с этим правилом формулу (18.6) следует переписать как

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i, \quad (20.1)$$

а отображение (18.7) следует записывать как

$$\mathbf{x} \mapsto \left\| \begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \right\|. \quad (20.2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 20.1. Правило из определения 20.2 применяется и в случае базисов на прямой и базисов на плоскости. Руководствуясь этим правилом перепишите формулы (16.1), (16.2), (17.4) и (17.5).

### § 21. Использование координат векторов.

Вектора могут применяться при решении различных геометрических задач. При этом с ними выполняются базовые алгебраические операции. Это операция сложения векторов и операция умножения вектора на число. Использование базисов и координат векторов в этих базисах основано на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 21.1. Пусть выбран и зафиксирован некоторый базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$ . В этой ситуации при сложении векторов их координаты в данном базисе складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, т. е. если

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}, \quad (21.1)$$

то для  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  и  $\alpha \cdot \mathbf{x}$  имеют место соотношения

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \cdot \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \alpha x^2 \\ \alpha x^3 \end{pmatrix}. \quad (21.2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 21.1. Докажите теорему 21.1, используя для этого формулы (21.1) и (21.2), а также теорему 19.1.

УПРАЖНЕНИЕ 21.2. Сформулируйте и докажите теоремы, аналогичные теореме 21.1, для случая базисов на прямой и базисов на плоскости.

## § 22. Замена базиса. Формулы перехода и матрицы перехода.

При решении геометрических задач иногда возникает необходимость заменить один базис на другой. Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — два базиса в пространстве  $\mathbb{E}$ . Если базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  заменяется на базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ , то  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  принято называть *старым базисом*, а  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — *новым базисом*. Замену старого базиса новым принято называть *переходом из старого базиса в новый базис* или *прямым переходом*. Обратную замену нового базиса на старый базис принято называть *обратным переходом*.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — два базиса в пространстве  $\mathbb{E}$ , из которых  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — старый базис, а  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — новый базис. При прямом переходе из старого в новый базис вектора нового базиса раскладываются по старому базису:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_1 &= S_1^1 \mathbf{e}_1 + S_1^2 \mathbf{e}_2 + S_1^3 \mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= S_2^1 \mathbf{e}_1 + S_2^2 \mathbf{e}_2 + S_2^3 \mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 &= S_3^1 \mathbf{e}_1 + S_3^2 \mathbf{e}_2 + S_3^3 \mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{22.1}$$

Формулы (22.1) называются формулами *прямого перехода*. Числовые коэффициенты  $S_1^1, S_1^2$  и  $S_1^3$  в (22.1) — это координаты вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_1$  в разложении по старому базису. В соответствии с определением 20.2 они пронумерованы верхним индексом. Нижний индекс 1 у них — это номер вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_1$ , координатами которого они являются. Он нужен для того, чтобы отличать координаты вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_1$  от координат векторов  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_3$  во второй и в третьей формулах (22.1).

Применим отображение (20.2) к формулам перехода и запишем координаты векторов  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  в виде столбцов:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 \mapsto \begin{pmatrix} S_1^1 \\ S_1^2 \\ S_1^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 \mapsto \begin{pmatrix} S_2^1 \\ S_2^2 \\ S_2^3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 \mapsto \begin{pmatrix} S_3^1 \\ S_3^2 \\ S_3^3 \end{pmatrix}.\tag{22.2}$$

Столбцы (22.2) принято объединять в матрицу. Такую матрицу естественно обозначить буквой  $S$ :

$$S = \begin{vmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 \end{vmatrix}. \quad (22.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.1.** Матрица (22.3), компоненты которой определяются формулами прямого перехода (22.1) называется матрицей *прямого перехода*.

Заметим, что компоненты матрицы прямого перехода  $S_j^i$  пронумерованы двумя индексами, один из которых верхний, а другой — нижний. Индексы определяют положение элемента  $S_j^i$  в матрице  $S$ : верхний индекс  $i$  — это номер строки, а нижний индекс  $j$  — номер столбца. Это обстоятельство является частью общего правила.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.2.** Если элементы двухиндексного массива пронумерованы индексами на разных уровнях, то при записи их в матрицу верхний индекс используется как номер строки, а нижний индекс — как номер столбца.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.3.** Если элементы двухиндексного массива пронумерованы индексами на одном уровне, то при записи их в матрицу первый индекс используется как номер строки, а второй индекс — как номер столбца.

Определения 22.2 и 22.3 можно рассматривать как часть соглашения о расстановке индексов (см. определение 20.1), хотя формально они таковыми не являются, поскольку определяют не расположение индексов, а способ визуализации элементов массива в виде матрицы.

Формулы прямого перехода (22.1) можно записать в сокращённом виде, используя для этого знак суммирования:

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^3 S_j^i \mathbf{e}_i, \quad \text{где } j = 1, 2, 3. \quad (22.4)$$



Есть ещё один способ сокращённой записи формул (22.1). Он использует матричное умножение (см. [7]):

$$\| \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 \| = \| \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 \end{array} \right\|. \quad (22.5)$$

Заметим, что базисные вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  и  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в формуле (22.5) записаны в строчку. Это обстоятельство является следствием общего правила.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.4.** Если элементы одноиндексного массива пронумерованы нижними индексами, то в матричном представлении они формируют строку, т.е. матрицу, высота которой равна единице.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.5.** Если элементы одноиндексного массива пронумерованы верхними индексами, то в матричном представлении они формируют столбец, т.е. матрицу, ширина которой равна единице.

Заметим, что запись компонент вектора  $\mathbf{x}$  в столбик в формуле (20.2) согласуется с правилом из определения 22.5, а формула (18.7) нарушает сразу два правила — правило из определения 20.2 и правило из определения 22.5.

Теперь рассмотрим обратный переход от нового базиса  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  к старому базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . При обратном переходе вектора старого базиса раскладываются по новому базису:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= T_1^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + T_1^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + T_1^3 \tilde{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= T_2^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + T_2^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + T_2^3 \tilde{\mathbf{e}}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= T_3^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + T_3^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + T_3^3 \tilde{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Формулы (22.6) называются формулами *обратного перехода*. Числовые коэффициенты в формулах (22.6) — это координаты векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  в разложении по новому базису. Из

этих коэффициентов формируются столбцы:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \left\| \begin{array}{c} T_1^1 \\ T_1^2 \\ T_1^3 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \left\| \begin{array}{c} T_2^1 \\ T_2^2 \\ T_2^3 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \left\| \begin{array}{c} T_3^1 \\ T_3^2 \\ T_3^3 \end{array} \right\|. \quad (22.7)$$

Затем столбцы (22.7) объединяются в матрицу:

$$T = \left\| \begin{array}{ccc} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{array} \right\|. \quad (22.8)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.6.** Матрица (22.8), компоненты которой определяются формулами обратного перехода (22.6) называется матрицей *обратного перехода*.

Формулы обратного перехода (22.6) имеют сокращённую форму записи, аналогичную (22.4):

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 T_j^i \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad \text{где } j = 1, 2, 3. \quad (22.9)$$

Имеется также матричная форма записи формул (22.6):

$$\| \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \| = \| \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 \| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{array} \right\|. \quad (22.10)$$

Формула (22.10) аналогична формуле (22.5).

**УПРАЖНЕНИЕ 20.1.** По аналогии с (22.1) и (22.6) запишите формулы перехода для базисов на плоскости и для базисов на прямой (см. определения 16.1 и 17.1). Запишите также сокращённые и матричные варианты этих формул.

### § 23. Некоторые сведения о матрицах перехода.

**ТЕОРЕМА 23.1.** Матрицы  $S$  и  $T$ , компоненты которых определяются формулами перехода (22.1) и (22.6), являются обратными друг для друга, т. е.  $T = S^{-1}$  и  $S = T^{-1}$ .

Я не стану здесь приводить доказательство теоремы 23.1. Это доказательство содержится в книге [1].

Соотношения  $T = S^{-1}$  и  $S = T^{-1}$  из теоремы 23.1 для матриц  $S$  и  $T$  означают, что их перемножение в произвольном порядке даёт единичную матрицу (см. [7]):

$$S \cdot T = 1 \qquad T \cdot S = 1. \qquad (23.1)$$

Напомню, что единичная матрица — это квадратная матрица, на главной диагонали которой расположены единицы, а во всех остальных позициях — нули. Такую матрицу часто обозначают тем же символом 1, что и число один:

$$1 = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \qquad (23.2)$$

Для обозначения компонент единичной матрицы (23.2) используется символ  $\delta$ . При этом индексы, которые нумеруют строки и столбцы матрицы, могут располагаться как на одном уровне, так и на разных уровнях:

$$\delta^{ij} = \delta_j^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \qquad (23.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.1.** Двухиндексный массив чисел  $\delta$ , определяемый формулой (23.3), называется символом Кронекера.

Расположение индексов в символе Кронекера определяется контекстом, в котором он возникает. Например, соотношения

(23.1) можно расписать по компонентам. При этом индексы в символе Кронекера располагаются на разных уровнях:

$$\sum_{j=1}^3 S_j^i T_k^j = \delta_k^i, \quad \sum_{j=1}^3 T_j^i S_k^j = \delta_k^i. \quad (23.4)$$

Такое расположение индексов символ Кронекера в (23.4) наследует от матриц перехода  $S$  и  $T$ .

Заметим, что матрицы перехода  $S$  и  $T$  являются квадратными матрицами. Для таких матриц вводится понятие *детерминанта* или *определителя* (см. [7]). Это число, вычисляемое через компоненты матрицы по специальным формулам. В случае единичной матрицы (23.2) эти формулы дают

$$\det 1 = 1. \quad (23.5)$$

Следующий факт также хорошо известен. Его доказательство можно найти в книге [7].

**ТЕОРЕМА 23.2.** *Детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов.*

Применим теорему 23.2 и формулу (23.5) к произведению матриц  $S$  и  $T$  в формулах (23.1). Это даёт:

$$\det S \cdot \det T = 1. \quad (23.6)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.2.** Матрица с нулевым детерминантом называется *вырожденной*. Если же детерминант матрицы отличен от нуля, то такая матрица называется *невырожденной*.

Из формулы (23.6) в силу определения 23.2 немедленно вытекает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 23.3.** *Для любых двух базисов в пространстве  $\mathbb{E}$  связывающие их матрицы перехода  $S$  и  $T$  невырождены, причём произведение их детерминантов равно единице.*

**ТЕОРЕМА 23.4.** *Всякая невырожденная матрица  $S$  размера  $3 \times 3$  может быть получена как матрица перехода из некоторого базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  в некоторый другой базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$ .*

Теорема 23.4 является усилением теоремы 23.3. Её доказательство можно найти в книге [1].

**УПРАЖНЕНИЕ 23.1.** *Сформулируйте теоремы, аналогичные теоремам 23.1, 23.2 и 23.4, для базисов на плоскости и для базисов на прямой.*

## § 24. Расстановка индексов в суммах.

Как мы уже видели, при работе с координатами векторов возникают формулы, содержащие суммы. Эти суммы удобно записывать в сокращённом виде, используя знак суммирования. При записи сумм надо соблюдать несколько правил, которые перечислены ниже в виде определений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.1.** Каждый знак суммирования в формуле имеет свою область действия. Эта область действия начинается непосредственно после знака суммирования справа от него и простирается до одного из ограничителей:

- 1) до конца формулы;
- 2) до знака равенства;
- 3) до первого знака «+» или «-», не заключённого в скобки, открывающиеся после данного знака суммирования;
- 4) до первой закрывающей скобки, открывающая скобка для которой расположена до данного знака суммирования.

Напомню, что если в формуле присутствует знак суммирования и если какая-либо переменная использована в качестве переменной цикла в этом знаке суммирования, то такая переменная называется *индексом суммирования* (см. формулу (8.3) и комментарий к ней).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.2.** Каждый индекс суммирования может использоваться только в пределах области действия соответствующего ему знака суммирования.

Помимо простых сумм в формулах могут использоваться кратные суммы. Для них выполняется следующее правило.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.3.** Одна и та же переменная не может быть индексом суммирования в более чем одном знаке суммы, входящем в кратную сумму.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.4.** Переменные, не являющиеся индексами суммирования, называются *свободными переменными*.

Как индексы суммирования, так и свободные переменные могут использоваться в качестве индексов для нумерации базисных векторов либо для нумерации элементов числовых массивов. При этом применяется следующая терминология.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.5.** Свободная переменная, используемая как индекс, называется *свободным индексом*.

В определениях 24.1, 24.2 и 24.3 перечислены общеупотребительные правила, которые соблюдаются всегда. Кроме них имеются специальные правила, которые действуют лишь в тех формулах, которые записываются в рамках эйнштейновская тензорной нотации (см. определение 20.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.6.** Если выражение является простой либо кратной суммой и если каждое слагаемое в ней не содержит внутри себя других сумм, то каждый свободный индекс входит в это выражение ровно один раз, а каждый индекс суммирования входит ровно два раза, причём один раз как верхний индекс и один раз как нижний индекс.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.7.** Из выражений, построенных в соответствии с определением 24.6, могут составляться суммы с числовыми коэффициентами. При этом все слагаемые должны иметь один и тот же набор свободных индексов и каждый

свободный индекс должен занимать одно и то же положение (верхнее или нижнее) во всех слагаемых суммы. Независимо от количества слагаемых, при подсчёте числа вхождений каждый свободный индекс считается входящим во всю сумму один раз. Положение свободного индекса в сумме (верхнее или нижнее) определяется его положением в каждом из слагаемых суммы.

В качестве примеров рассмотрим несколько выражений:

$$\sum_{i=1}^3 a^i b_i, \quad \sum_{i=1}^3 a^i g_{ij}, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^k g_{ik}, \quad (24.1)$$

$$\sum_{k=1}^3 2 A_k^i b^m u^k v_q + \sum_{j=1}^3 3 C_{jq}^{ijm} - \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 C_{qs}^r B^{ism} v_r. \quad (24.2)$$

**УПРАЖНЕНИЕ 24.1.** Убедитесь в том, что все выражения (24.1) удовлетворяют определению 24.6, а выражение (24.2) удовлетворяют определению 24.7.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.8.** Суммы, составленные согласно определению 24.7, могут войти в состав простых и кратных сумм, которые будут внешними по отношению к ним. При этом некоторые из их свободных индексов или все их свободные индексы могут превратиться в индексы суммирования. Те свободные индексы, которые остаются свободными, включаются в список свободных индексов всего выражения в целом.

При подсчёте числа вхождений индексов к суммам, включённым в состав простых и кратных внешних сумм, применяется правило подсчёта из определения 24.7. С учётом этого правила подсчёта числа вхождений индексов, каждый свободный индекс окончательно построенного выражения должен входить в него ровно один раз, а каждый индекс суммирования — ровно два раза, причём один раз как верхний индекс и один раз как нижний индекс.

В качестве примера рассмотрим следующее выражение, которое имеет внешние и внутренние суммы:

$$\sum_{k=1}^3 A_k^i \left( B_q^k + \sum_{i=1}^3 C_{iq}^k u^i \right) \quad (24.3)$$

УПРАЖНЕНИЕ 24.2. Убедитесь в том, что выражение (24.3) удовлетворяют определению 24.8.

УПРАЖНЕНИЕ 24.3. Раскройте скобки в (24.3) и убедитесь в том, что полученное в результате этого выражение удовлетворяют определению 24.7.

Из выражений построенных в соответствии с определениями 24.6, 24.7 и 24.8 составляются равенства. При составлении таких равенств применяется следующее правило.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.9. Обе части равенства должны иметь один и тот же набор свободных индексов и каждый свободный индекс должен занимать одно и то же положение (верхнее или нижнее) в обеих частях равенства.

## § 25. Пересчёт координат вектора при замене базиса.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — два базиса в пространстве  $\mathbb{E}$  и пусть базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  заменяется на базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ . Как уже отмечалось ранее, в этом случае базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  называют старым базисом, а базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — новым базисом.

Рассмотрим некоторый произвольный вектор  $\mathbf{x}$  в пространстве  $\mathbb{E}$ . Разложив этот вектор по старому и новому базисам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ , получим два набора его координат:

$$\mathbf{x} \mapsto \left\| \begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{x} \mapsto \left\| \begin{array}{c} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{array} \right\|. \quad (25.1)$$



Оба отображения (25.1) биективны. По этой причине имеется взаимно однозначная связь между наборами чисел  $x^1, x^2, x^3$  и  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ . Для получения явных формул, выражающих координаты вектора  $\mathbf{x}$  в новом базисе через его координаты в старом базисе воспользуемся разложением (20.1):

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 x^j \mathbf{e}_j. \quad (25.2)$$

Применим формулу обратного перехода (22.9) для того, чтобы выразить вектор  $\mathbf{e}_j$  в (25.2) через вектора нового базиса  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ . После подстановки (22.9) в (25.2) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{j=1}^3 x^j \left( \sum_{i=1}^3 T_j^i \tilde{\mathbf{e}}_i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 x^j T_j^i \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 T_j^i x^j \right) \tilde{\mathbf{e}}_i. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Формула (25.3) выражает вектор  $\mathbf{x}$  в виде линейной комбинации базисных векторов  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ , т. е. это разложение вектора  $\mathbf{x}$  в новом базисе. В силу единственности разложения вектора по базису (см. теорему 19.1) коэффициенты такого разложения совпадают с координатами вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ :

$$\tilde{x}^i = \sum_{j=1}^3 T_j^i x^j, \quad \text{где } i = 1, 2, 3. \quad (25.4)$$

Формулы (25.4), выражающие координаты произвольного вектора  $\mathbf{x}$  в новом базисе через его координаты в старом базисе называются формулами *прямого пересчёта*. В соответствии со сказанным формулы, выражающие координаты произвольного вектора  $\mathbf{x}$  в старом базисе через его координаты в новом базисе должны называться формулами *обратного*

*пересчёта.* Эти формулы не требуют отдельного вывода. Достаточно перенести волну из левой части формул (25.4) в правую и заменить  $T_j^i$  на  $S_j^i$ . Это даёт

$$x^i = \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{x}^j, \quad \text{где } i = 1, 2, 3. \quad (25.5)$$

Формулы прямого пересчёта (25.4) имеют развёрнутую запись, в которой суммирование выполняется явно:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= T_1^1 x^1 + T_2^1 x^2 + T_3^1 x^3, \\ \tilde{x}^2 &= T_1^2 x^1 + T_2^2 x^2 + T_3^2 x^3, \\ \tilde{x}^3 &= T_1^3 x^1 + T_2^3 x^2 + T_3^3 x^3. \end{aligned} \quad (25.6)$$

То же самое верно и для формул обратного пересчёта (25.5):

$$\begin{aligned} x^1 &= S_1^1 \tilde{x}^1 + S_2^1 \tilde{x}^2 + S_3^1 \tilde{x}^3, \\ x^2 &= S_1^2 \tilde{x}^1 + S_2^2 \tilde{x}^2 + S_3^2 \tilde{x}^3, \\ x^3 &= S_1^3 \tilde{x}^1 + S_2^3 \tilde{x}^2 + S_3^3 \tilde{x}^3. \end{aligned} \quad (25.7)$$

Кроме (25.6) имеется матричная запись формул (25.4):

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (25.8)$$

Формулы обратного пересчёта (25.5) наряду с развёрнутой записью (25.7) имеют ещё и матричную запись

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} \quad (25.9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 25.1. Запишите аналоги формул пересчёта (25.4), (25.5), (25.6), (25.7), (25.8) и (25.9) для векторов на плоскости и векторов на прямой, разложенных по соответствующим базисам на плоскости и на прямой.

### § 26. Скалярное произведение.

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два ненулевых свободных вектора. Отложим их геометрические реализации  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  от некоторой произвольной точки  $O$ . Углом между векторами  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  называется наименьший из углов, образуемый лучами  $[OA)$  и  $[OB)$  в точке  $O$ . На рисунке 26.1 этот угол обозначен через  $\varphi$ . Величина угла  $\varphi$  лежит в диапазоне от 0 до  $\pi$ :

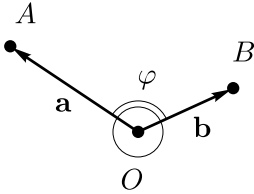


Рис. 26.1

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Длины векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  не зависят от выбора точки  $O$  (см. определения 3.1 и 4.2). То же самое верно и для угла между ними. Поэтому мы можем говорить о длинах свободных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и об угле между ними:

$$|\mathbf{a}| = |OA|, \quad |\mathbf{b}| = |OB|, \quad \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \widehat{AOB} = \varphi.$$

В случае  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  длины векторов  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$  определены, но угол между ними не определён.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26.1. Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi. \quad (26.1)$$

В случае  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  скалярное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  считается равным нулю.

Знаком скалярного умножения в записи  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  служит запятая, но не сама по себе, а совместно с окружающими её круглыми скобками. При этом они являются естественными ограничителями, которые выделяют сомножители в скалярном произведении: в промежутке от открывающей скобки до запятой располагается первый сомножитель, от запятой до закрывающей скобки — второй сомножитель. Поэтому в сложных выражениях дополнительных ограничителей в виде скобок не требуется. Например, в формуле

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d})$$

сначала вычисляются суммы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ , лишь затем выполняется скалярное умножение.

**Примечание.** Часто для обозначения скалярного произведения используется запись  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . В англоязычной литературе даже имеется термин «dot product» (умножение точкой). На мой взгляд такое обозначение является неудачным. Оно вносит путаницу, ибо точка может ставиться при умножении векторов на числа и при умножении чисел друг с другом.

### § 27. Ортогональная проекция на прямую.

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два свободных вектора, причём  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ . Отложим их геометрические реализации  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  от некоторой произвольной точки  $O$ . Ненулевой вектор  $\overrightarrow{OA}$  задаёт прямую. Опустим из конца вектора  $\overrightarrow{OB}$ , т. е. из точки  $B$ , перпендикуляр на эту прямую и обозначим через  $C$  основание этого перпендикуляра (см. рисунок 27.1). В особом случае, когда  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$  и точка  $B$  лежит на прямой  $OA$ , выберем точку

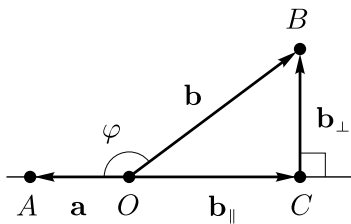


Рис. 27.1

$C$  совпадающей с точкой  $B$ .

Точка  $C$  определяет два вектора  $\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{CB}$ . Вектор  $\overrightarrow{OC}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ , а вектор  $\overrightarrow{CB}$  ортогонален ему. Параллельными переносами вектора  $\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{CB}$  можно растягивать до свободных векторов  $\mathbf{b}_{\parallel}$  и  $\mathbf{b}_{\perp}$ . Заметим, что точка  $C$  определяется точкой  $B$  и прямой  $OA$  однозначно (см. теорему 6.5 из главы III в книге [7]). По этой причине вектора  $\mathbf{b}_{\parallel}$  и  $\mathbf{b}_{\perp}$  не зависят от выбора точки  $O$  и мы можем сформулировать следующую теорему.

**ТЕОРЕМА 27.1.** *Для всякого ненулевого вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и для всякого вектора  $\mathbf{b}$  существуют два однозначно определённых вектора  $\mathbf{b}_{\parallel}$  и  $\mathbf{b}_{\perp}$ , таких, что вектор  $\mathbf{b}_{\parallel}$  коллинеарен  $\mathbf{a}$ , вектор  $\mathbf{b}_{\perp}$  перпендикулярен  $\mathbf{a}$  и имеет место разложение:*

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}. \quad (27.1)$$

Следует отметить особый случай, когда точка  $C$  совпадает с точкой  $B$ . В этом случае  $\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{0}$  и визуальная проверка перпендикулярности векторов  $\mathbf{b}_{\perp}$  и  $\mathbf{a}$  невозможна. Для того, чтобы охватить этот особый случай теоремой 27.1, вводится следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.1.** Все нулевые вектора считаются перпендикулярными друг другу, а также любой нулевой вектор считается перпендикулярным любому ненулевому вектору.

Подобно определению 3.2, определение 27.1 сформулировано для геометрических векторов. После перехода к свободным векторам определения 3.2 и 27.1 удобно объединить в одно и сформулировать следующим образом.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.2.** Нулевой свободный вектор  $\mathbf{0}$  сопоставлен самому себе и любому другому вектору. Нулевой свободный вектор  $\mathbf{0}$  перпендикулярен самому себе и любому другому вектору.

С учётом сформулированного выше определения 27.2 теорема 27.1 доказывается предшествующими ей построениями, а разложение (27.1) вытекает из очевидного равенства

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}.$$

Пусть вектор  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  зафиксирован. В этой ситуации теорема 27.1 определяет отображение  $\pi_{\mathbf{a}}$ , которое каждому вектору  $\mathbf{b}$  ставит в соответствие его параллельную компоненту  $\mathbf{b}_{\parallel}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.3.** Отображение  $\pi_{\mathbf{a}}$ , которое каждому свободному вектору  $\mathbf{b}$  ставит в соответствие его компоненту  $\mathbf{b}_{\parallel}$  в разложении (27.1), называется *ортогональным проектированием на прямую, заданную вектором  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$*  или, что более точно, *ортогональным проектированием на направление вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$* .

Отображение ортогонального проектирования  $\pi_{\mathbf{a}}$  тесно связано со скалярным произведением векторов. Эта связь устанавливается следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 27.2.** Для всякого ненулевого вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и для всякого вектора  $\mathbf{b}$  вектор  $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$  вычисляется по формуле

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}. \quad (27.2)$$

**Док-во.** В случае  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  обе части равенства (27.2) зануляются и оно тривиальным образом выполнено. Поэтому с самого начала можно считать, что  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ .

Легко видеть, что вектора из разных частей равенства (27.2) коллинеарны. Начнём с того, что докажем равенство их длин. Длина вектора  $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$  вычисляется по рисунку 27.1:

$$|\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})| = |\mathbf{b}_{\parallel}| = |\mathbf{b}| |\cos \varphi|. \quad (27.3)$$

Длина вектора, стоящего в правой части формулы (27.2), определяется самой этой формулой:

$$\left| \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right| = \frac{|(\mathbf{b}, \mathbf{a})|}{|\mathbf{a}|^2} |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}| |\mathbf{a}| |\cos \varphi|}{|\mathbf{a}|} = |\mathbf{b}| |\cos \varphi|. \quad (27.4)$$

Из сравнения формул (27.3) и (27.4) заключаем

$$|\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})| = \left| \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} \right|. \quad (27.5)$$

В силу (27.5) для доказательства равенства (27.2) достаточно доказать сонаправленность векторов

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) \uparrow \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}. \quad (27.6)$$

Поскольку  $\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}_{\parallel}$ , вновь воспользуемся рисунком 27.1 и рассмотрим три возможных случая:

$$0 \leq \varphi < \pi/2, \quad \varphi = \pi/2, \quad \pi/2 < \varphi \leq \pi.$$

В первом случае оба вектора (27.6) сонаправлены с вектором  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ . Поэтому они сонаправлены друг другу.

Во втором случае оба вектора (27.6) равны нулю. Они являются сонаправленными в силу определения 3.2.

В третьем случае оба вектора (27.6) направлены противоположно вектору  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ . Поэтому они опять сонаправлены друг другу. Соотношение (27.6) и теорема 27.2 доказаны.  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27.4.** Отображение  $f$ , действующее из множества свободных векторов в множество свободных векторов, называется *линейным отображением*, если оно обладает следующими двумя свойствами:

- 1)  $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ ;
- 2)  $f(\alpha \mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$ .

Свойства 1) и 2), которые должны быть выполнены для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и для любого числа  $\alpha$ , называются *свойствами линейности*.

**ТЕОРЕМА 27.3.** Для всякого ненулевого вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  отображение ортогонального проектирования  $\pi_{\mathbf{a}}$  на прямую, заданную вектором  $\mathbf{a}$ , является линейным отображением.

Для доказательства теоремы 27.3 нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

**ЛЕММА 27.1.** Для всякого ненулевого вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  сумма двух векторов, коллинеарных  $\mathbf{a}$  есть вектор, коллинеарный вектору  $\mathbf{a}$ , и сумма двух векторов, перпендикулярных  $\mathbf{a}$ , есть вектор, перпендикулярный  $\mathbf{a}$ .

Док-во ЛЕММЫ 27.1. Первое утверждение леммы очевидно. Оно вытекает непосредственно из определения 5.1.

Перейдём к доказательству второго утверждения. Пусть  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — два вектора, таких, что  $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$  и  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ . В случаях  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , а также в случае  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$  второе утверждение леммы тоже очевидно. В этих случаях геометрические реализации всех трёх векторов  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  можно выбрать лежащими на одной прямой, которая будет перпендикулярна вектору  $\mathbf{a}$ .

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{b} \not\parallel \mathbf{c}$ . Выберем некоторую произвольную точку  $O$  и отложим от нее вектор  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ . Затем от конца вектора  $\overrightarrow{OB}$  отложим вектор  $\mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$ . В силу  $\mathbf{b} \not\parallel \mathbf{c}$  точки  $O$ ,  $B$  и  $C$  не

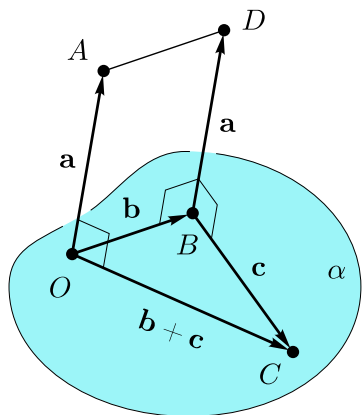


Рис. 27.2

лежат на одной прямой. Они определяют плоскость, которую



мы обозначим  $\alpha$ . Сумма векторов  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$  лежит в этой плоскости. Она служит геометрической реализацией вектора  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , т. е.  $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ .

Для вектора  $\mathbf{a}$  построим две геометрические реализации  $\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ . Это два равных геометрических вектора. Из равенства  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD}$  вытекает параллельность прямых  $OA$  и  $BD$ . В силу  $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$  и  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$  прямая  $BD$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $OB$  и  $BC$  в плоскости  $\alpha$ . Поэтому она является перпендикуляром к этой плоскости. Из  $BD \perp \alpha$  и  $BD \parallel OA$  вытекает  $OA \perp \alpha$ , а из  $OA \perp \alpha$  вытекает перпендикулярность векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OC}$ . Значит сумма векторов  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  перпендикулярна вектору  $\mathbf{a}$ . Лемма 27.1 доказана.  $\square$

Док-во ТЕОРЕМЫ 27.3. Согласно определению 27.4 для доказательства теоремы надо проверить выполнение двух свойств линейности для отображения  $\pi_{\mathbf{a}}$ . Первое из них в данном случае записывается в виде равенства

$$\pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) + \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}). \quad (27.7)$$

Обозначим  $\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Согласно теореме 27.2 для векторов  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  имеют место разложения вида (27.1):

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}, \quad (27.8)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\parallel} + \mathbf{c}_{\perp}, \quad (27.9)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\parallel} + \mathbf{d}_{\perp}. \quad (27.10)$$

Согласно той же теореме 27.2 компоненты разложений (27.8), (27.9) и (27.10) однозначно фиксируются условиями

$$\mathbf{b}_{\parallel} \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_{\perp} \perp \mathbf{a}, \quad (27.11)$$

$$\mathbf{c}_{\parallel} \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{c}_{\perp} \perp \mathbf{a}, \quad (27.12)$$

$$\mathbf{d}_{\parallel} \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{d}_{\perp} \perp \mathbf{a}. \quad (27.13)$$

Сложив равенства (27.8) и (27.9), получаем

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{c}_{\parallel}) + (\mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{c}_{\perp}). \quad (27.14)$$

В силу (27.11) и (27.12) к компонентам разложения (27.14) применима лемма 27.1. Применение этой леммы даёт

$$(\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{c}_{\parallel}) \parallel \mathbf{a}, \quad (\mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{c}_{\perp}) \perp \mathbf{a}. \quad (27.15)$$

Остаётся сравнить (27.14) с (27.10) и (27.15) с (27.13). Из такого сравнения в силу теоремы 27.2 заключаем

$$\mathbf{d}_{\parallel} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{c}_{\parallel}, \quad \mathbf{d}_{\perp} = \mathbf{b}_{\perp} + \mathbf{c}_{\perp}. \quad (27.16)$$

Согласно определению 27.3 первое из равенств (27.16) равносильно равенству (27.7), которое требовалось проверить.

Перейдём к доказательству второго условия линейности для отображения  $\pi_{\mathbf{a}}$ . Оно записывается так:

$$\pi_{\mathbf{a}}(\alpha \mathbf{b}) = \alpha \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}). \quad (27.17)$$

Обозначим  $\mathbf{e} = \alpha \mathbf{b}$  и, применив теорему 27.2, запишем

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}, \quad (27.18)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_{\parallel} + \mathbf{e}_{\perp}. \quad (27.19)$$

Согласно теореме 27.2 компоненты в разложениях (27.18) и (27.19) однозначно фиксируются условиями

$$\mathbf{b}_{\parallel} \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_{\perp} \perp \mathbf{a}, \quad (27.20)$$

$$\mathbf{e}_{\parallel} \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{e}_{\perp} \perp \mathbf{a}. \quad (27.21)$$

Умножим обе части равенства (27.18) на  $\alpha$  и получим

$$\mathbf{e} = \alpha \mathbf{b} = \alpha \mathbf{b}_{\parallel} + \alpha \mathbf{b}_{\perp}. \quad (27.22)$$

Умножение вектора на число  $\alpha$  даёт вектор, коллинеарный исходному. По этой причине из (27.20) вытекают соотношения

$$(\alpha \mathbf{b}_{\parallel}) \parallel \mathbf{a}, \quad (\alpha \mathbf{b}_{\perp}) \perp \mathbf{a}, \quad (27.23)$$

Сравним соотношение (27.22) с (27.19) и соотношения (27.23) с (27.21). После этого применение теоремы 27.2 даёт

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \alpha \mathbf{b}_{\parallel}, \quad \mathbf{e}_{\perp} = \alpha \mathbf{b}_{\perp}. \quad (27.24)$$

Согласно определению 27.3 первое из равенств (27.24) равносильно равенству (27.17), которое требовалось проверить. Теорема 27.3 доказана.  $\square$

### § 28. Свойства скалярного произведения.

**ТЕОРЕМА 28.1.** *Скалярное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами, которые выполняются для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и любого числа  $\alpha$ :*

- 1)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
- 2)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$ ;
- 3)  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{c})$ ;
- 4)  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$ , причём из  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$  вытекает  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28.1.** Свойство 1) в теореме 28.1 называется свойством *симметричности*, свойства 2) и 3) называются свойствами *линейности по первому сомножителю*, свойство 4) называется свойством *положительности* или свойством *положительной определённости*.

**ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 28.1.** Свойство симметричности 1) вытекает непосредственно из определения 26.1 и формулы (26.1) в нём. Действительно, если один из векторов  $\mathbf{a}$  или  $\mathbf{b}$  равен нулю, то обе части равенства  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$  равны нулю, в результате чего оно выполнено.

В случае ненулевых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  угол  $\varphi$  в формуле определяется парой векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  согласно рисунку 26.1 и не зависит от того, в каком порядке перечислены векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в этой паре векторов. Поэтому равенство  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$  в этом случае сводится к равенству

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \varphi,$$

которое выполнено, поскольку  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$  — это числа, либо числа сопровождаемые единицами измерения в зависимости от физической природы векторов.

Рассмотрим свойства линейности 2) и 3). Если  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , то обе части равенств  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$  и  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b})$  равны нулю, в силу чего эти равенства выполнены.

Если  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , то применяем теоремы 27.2 и 27.3. Из теоремы 27.2 получаем следующие равенства

$$\pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) - \pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2} \mathbf{c},$$

$$\pi_{\mathbf{c}}(\alpha \mathbf{a}) - \alpha \pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) = \frac{(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}) - \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{c})}{|\mathbf{c}|^2} \mathbf{c}.$$

В силу теоремы 27.3 отображение  $\pi_{\mathbf{c}}$  является линейным отображением (см. определение 27.4). Поэтому левые части в полученных выше равенствах обращаются в ноль. Теперь из  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  вытекает зануление числителей в дробях, стоящих в правых частях этих равенств, что доказывает свойства 2) и 3) из теоремы 28.1 для рассматриваемого случая  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ .

Согласно определению 26.1 скалярное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  равно нулю при  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Если же  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , применяется формула (26.1) в которой следует положить  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ , что даёт  $\varphi = 0$  и

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 > 0.$$

Это доказывает свойство 4) и завершает доказательство теоремы 28.1 в целом.  $\square$

**ТЕОРЕМА 28.2.** *Кроме свойств 1)–4), скалярное произведение обладает следующими двумя свойствами, которые выполнены для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и для любого числа  $\alpha$ :*

$$5) (\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b});$$

$$6) (\mathbf{c}, \alpha \mathbf{a}) = \alpha (\mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28.2.** Свойства 5) и 6) в теореме 28.2 называются свойствами *линейности по второму сомножителю*.

Свойства 5) и 6) легко выводятся из свойств 2) и 3) при помощи свойства 1). Действительно, мы имеем

$$(\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{c}, \alpha \mathbf{a}) = (\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

Эти вычисления доказывают теорему 28.2.

### § 29. Вычисление скалярного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

Пусть  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  — некоторый произвольный базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Согласно определению 18.1 — это упорядоченная тройка некопланарных векторов. Произвольность базиса означает, что никаких дополнительных ограничений, кроме условия некопланарности, на вектора  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  не накладывается. В частности, углы между векторами  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  в произвольном базисе не обязаны быть прямыми. По этой причине, такой базис мы называем косоугольным базисом и используем сокращение КСБ.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.1.** В данной книге *косоугольный базис* (КСБ) понимается как *произвольный базис*.

Итак, пусть  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  — некоторый косоугольный базис в пространстве  $\mathbb{E}$  и пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два свободных вектора, заданных своими координатами в этом базисе. Для обозначения

этого обстоятельства используем условную запись:

$$\mathbf{a} = \left\| \begin{array}{c} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{b} = \left\| \begin{array}{c} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{array} \right\| \quad (29.1)$$

В отличие от (21.1), вместо стрелки в (29.1) использован знак равенства. Это ещё раз подчеркивает тот факт, что если базис фиксирован, то вектора однозначно отождествляются с наборами их координат.

Условная запись (29.1) означает, что вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  представляются следующими разложениями:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j. \quad (29.2)$$

Подстановка (29.2) в скалярное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  даёт

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j \right). \quad (29.3)$$

Для преобразования формулы (29.3) применим свойства скалярного произведения 2) и 5) из теорем 28.1 и 28.2. Эти свойства позволяют вынести знаки суммирования по  $i$  и  $j$  за скобки скалярного произведения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j). \quad (29.4)$$

Далее применим свойства 3) и 6) из теорем 28.1 и 28.2. Они позволяют вынести числовые множители  $a^i$  и  $b^j$  за скобки скалярного произведения в (29.4):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i b^j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \quad (29.5)$$

Величины  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  в формуле (29.5) зависят от выбранного базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , а именно от длин базисных векторов и от углов между ними. Они не зависят от векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Величины  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  составляют массив из девяти чисел

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad (29.6)$$

пронумерованный двумя нижними индексами. Компоненты массива (29.6) принято записывать в квадратную матрицу:

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad (29.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.2. Матрица (29.7) с компонентами (29.6) называется матрицей Грама базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

С учётом обозначений (29.6) формула (29.5) принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i b^j g_{ij}. \quad (29.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.3. Формула (29.8) называется формулой для вычисления скалярного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

Формула (29.8) имеет матричную форму записи

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{vmatrix} \quad (29.9)$$

Заметим, что координатный столбец вектора  $\mathbf{b}$  в формуле (29.9) использован в неизменном виде, а координатный столбец вектора  $\mathbf{a}$  преобразован в строку. Такое преобразование

известно как транспонирование матриц (см. [7]).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29.4.** Преобразование прямоугольной матрицы, при котором элемент, находящийся в пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -того столбца, перемещается в пересечение  $j$ -ой строки и  $i$ -того столбца, называется *транспонированием*. Оно обозначается значком  $\top$ . В компьютерных пакетах  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  и  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  этот значок кодируется командой  $\backslash\text{top}$ .

Операцию транспонирования матрицы можно понимать как зеркальное отражение относительно главной диагонали.

С учётом обозначений (29.1), (29.7) и определения 29.4 матричная формула (29.9) записывается так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\top} \cdot G \cdot \mathbf{b}. \quad (29.10)$$

В правой части формулы (29.10) вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  представляются своими координатными столбцами, а преобразование одного из этих столбцов в строку записывается через операцию транспонирования.

**УПРАЖНЕНИЕ 29.1.** Покажите, что для любой прямоугольной матрицы  $A$  имеет место равенство  $(A^{\top})^{\top} = A$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 29.2.** Покажите, что для произведения двух матриц  $A$  и  $B$  имеет место равенство  $(A \cdot B)^{\top} = B^{\top} \cdot A^{\top}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 29.3.** Определите матрицы Грама для базисов на прямой и базисов на плоскости. Запишите аналоги формул (29.8), (29.9) и (29.10) для скалярного произведения векторов, лежащих на прямой и на плоскости.

### § 30. Симметричность матрицы Грама.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30.1.** Квадратная матрица  $A$  называется *симметричной*, если она не меняется при транспонировании, т. е. если выполнено равенство  $A^{\top} = A$ .



Матрицы Грама обладают целым рядом важных свойств. Одним из таких свойств является их симметричность.

**ТЕОРЕМА 30.1.** *Матрица Грама  $G$  любого базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  симметрична.*

**ДОК-ВО.** Согласно определению 30.1 симметричность матрицы  $G$  выражается формулой  $G^T = G$ . Согласно определению 29.4 равенство  $G^T = G$  эквивалентно соотношению

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (30.1)$$

для компонент матрицы  $G$ . Само же соотношение (30.1) после применения формулы (29.6) сводится к равенству

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i),$$

которое выполнено в силу свойства симметричности скалярного произведения (см. теорему 28.1 и определение 28.1).  $\square$

Заметим, что координатные столбцы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  входят в правую часть формулы (29.10) несколько неравноправным образом — один из них транспонируется, а другой нет. Симметричность матрицы  $G$  устраняет это неравноправие. Переобозначение индексов  $i$  и  $j$  в двойной сумме (29.8) и учёт соотношения (30.1) для компонент матрицы Грама дают

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a^j b^i g_{ji} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b^i a^j g_{ij}. \quad (30.2)$$

В матричном виде формула (30.2) записывается так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \cdot G \cdot \mathbf{a}. \quad (30.3)$$

Формула (30.3) аналогична формуле (29.10), но в ней уже координатный столбец вектора  $\mathbf{b}$  транспонируется, а координатный столбец вектора  $\mathbf{a}$  не транспонируется.

УПРАЖНЕНИЕ 30.1. Сформулируйте и докажите теорему, аналогичную теореме 30.1 для базисов на плоскости. Надо ли формулировать такую теорему для базисов на прямой.

### § 31. Ортонормированный базис.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.1. Базис на прямой, состоящий из одного ненулевого вектора  $\mathbf{e}$ , называется *ортонормированным базисом*, если  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, т. е.  $|\mathbf{e}| = 1$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.2. Базис на плоскости, состоящий из двух неколлинеарных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , называется *ортонормированным базисом*, если вектора  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  единичны по длине и перпендикулярны друг другу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31.3. Базис в пространстве  $\mathbb{E}$ , состоящий из трёх некопланарных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , называется *ортонормированным базисом*, если вектора  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  единичны по длине и перпендикулярны друг другу.

Для обозначения ортонормированного базиса в любом из перечисленных случаев используется сокращение ОНБ. В соответствии с определением 29.1 ортонормированный базис ОНБ не противопоставляется косоугольному базису КСБ, а является частным случаем такого базиса.

Заметим, что единичность векторов ортонормированного базиса в определениях 31.1, 31.2 и 31.3 означает, что их длина равна единице. Не одному сантиметру, не одному метру, не одному километру, а числу один. По этой причине все геометрические реализации таких векторов являются условно геометрическими (см. § 2). Подобно векторам скорости, ускорения и многих других физических величин, базисные вектора ортонормированного базиса можно изобразить на рисунке только после выбора масштабного множителя. Такой множитель в данном случае нужен для пересчёта числовой единицы в единицы длины.

### § 32. Матрица Грама ортонормированного базиса.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый ортонормированный базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Согласно определению 31.3 вектора  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_1| &= 1, & |\mathbf{e}_2| &= 1, & |\mathbf{e}_3| &= 1, \\ \mathbf{e}_1 &\perp \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_2 &\perp \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_3 &\perp \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Применив (32.1) к (29.6), находим компоненты матрицы Грама для ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (32.2)$$

Из (32.2) немедленно вытекает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 32.1.** *Матрица Грама (29.7) любого ортонормированного базиса является единичной матрицей:*

$$G = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = 1. \quad (32.3)$$

Вспомним, что компоненты единичной матрицы образуют двухиндексный массив чисел  $\delta$ , называемый символом Кронекера (см. определение 23.1). Поэтому с учётом (23.3) равенство (32.2) можно записать так:

$$g_{ij} = \delta_{ij}. \quad (32.4)$$

Нижнее расположение индексов символ Кронекера в (32.4) наследует от  $g_{ij}$ . Этим он отличается от символа Кронекера в (23.4). Несмотря на абсолютную идентичность компонент

единичные матрицы в (32.3) и в (23.1) имеют разную природу. А использование индексов на разных уровнях (см. определение 20.1) позволяет учесть это различие.

### § 33. Вычисление скалярного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе.

Согласно определению 29.1 термин *косоугольный базис* используется как синоним произвольного базиса. По этой причине ортонормированный базис является частным случаем косоугольного базиса и мы можем использовать формулу (29.8) с учётом соотношения (32.4):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i b^j \delta_{ij}. \quad (33.1)$$

При вычислении внутренней суммы по  $j$  в (33.1) этот индекс пробегает три значения и только при одном из этих трёх значений, когда  $j = i$  символ Кронекера  $\delta_{ij}$  отличен от нуля. По этой причине из внутренней суммы по  $j$  в (33.1) можно оставить лишь одно слагаемое:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a^i b^i \delta_{ii}. \quad (33.2)$$

Но  $\delta_{ii} = 1$ . Поэтому формула (33.2) принимает вид

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a^i b^i. \quad (33.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33.1.** Формула (33.3) называется формулой для вычисления скалярного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе.

Отметим, что суммы в формуле (29.8) удовлетворяют правилу расстановки индексов из определения 24.8, а сумма в

формуле (33.3) нарушает это правило. В ней индекс суммирования имеет два вхождения и оба вхождения верхние. Это особенность ортонормированного базиса. Он обладает более высоким уровнем симметрии и эта симметрия скрывает некоторые особенности, проявляющиеся лишь в произвольных (т. е. косоугольных) базисах.

Формула (33.3) имеет следующую матричную запись:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{vmatrix}. \quad (33.4)$$

С учётом обозначений (29.1) и определения 29.4 формулу (33.4) можно сократить, записав так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b}. \quad (33.5)$$

Формулу (33.4) можно вывести из формулы (29.9), а формулу (33.5) — из формулы (29.10).

### § 34. Правые и левые тройки векторов. Понятие ориентации.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.1.** *Упорядоченной тройкой векторов* называется список из трёх векторов, в котором зафиксирован определённый порядок перечисления векторов.

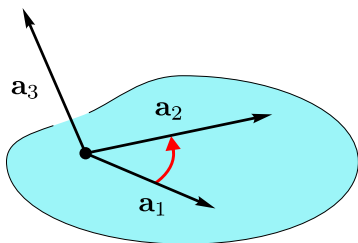


Рис. 34.1

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.2.** Упорядоченная тройка некопланарных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  называется *правой тройкой*, если при наблюдении с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко

второму виден как поворот против часовой стрелки.

В определении 34.2 предполагается, что мы рассматриваем геометрические реализации векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ , отложенные от некоторой общей для всех начальной точки как это показано на рисунке 34.1.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.3.** Упорядоченная тройка некопланарных векторов  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  называется *левой тройкой*, если при наблюдении с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму вектору виден как поворот по часовой стрелке.

Заданный поворот вокруг заданной оси при наблюдении с заданной позиции может быть только поворотом по часовой стрелке либо поворотом против часовой стрелки. Других вариантов нет. По этой причине всякая упорядоченная тройка некопланарных векторов является левой либо правой. Никаких других сортов троек по данному признаку нет.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34.4.** Свойство упорядоченных троек некопланарных векторов быть левыми или правыми называется их *ориентацией*.

### § 35. Векторное произведение.

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два неколлинеарных свободных вектора. Отложим их геометрические реализации  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  от некоторой произвольной точки  $O$ . В этом случае вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  задают плоскость  $AOB$  и лежат в этой плоскости. Угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяется согласно рисунку 26.1. В силу  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  этот угол лежит в диапазоне  $0 < \varphi < \pi$  и поэтому  $\sin \varphi \neq 0$ .

Проведём через точку  $O$  прямую, перпендикулярную к плоскости  $AOB$ , и обозначим эту прямую через  $c$ . Прямая  $c$  перпендикулярна векторам  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ :

$$c \perp \mathbf{a}, \quad c \perp \mathbf{b}. \quad (35.1)$$

Известно, что условиями (35.1) прямая  $s$ , проходящая через точку  $O$  фиксируется однозначно (см. теоремы 1.1 и 1.3 в главе IV книги [6]).

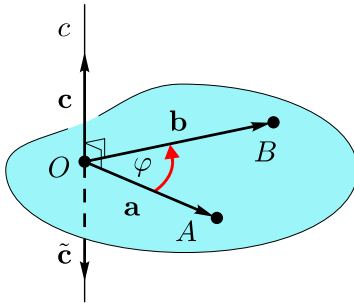


Рис. 35.1

На прямой  $s$  есть два направления. На рисунке 35.1 они задаются векторами  $\mathbf{c}$  и  $\tilde{\mathbf{c}}$ . При этом тройка векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  является правой, а тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{c}}$  — левой. Указание ориентации тройки векторов однозначно фиксирует выбор одного из двух возможных направлений на прямой  $s$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35.1.** *Векторным произведением* неколлинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , который определяется следующими тремя условиями:

- 1)  $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$  и  $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ ;
- 2) тройка векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  является правой;
- 3)  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi$ .

В случае коллинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  их векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  считается равным нулю.

Знаком векторного умножения в записи  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  служит запятая, но не сама по себе, а совместно с окружающими её квадратными скобками. При этом они являются естественными ограничителями, которые выделяют сомножители в векторном произведении: в промежутке от открывающей скобки до запятой располагается первый сомножитель, от запятой до закрывающей скобки — второй сомножитель. Поэтому в сложных выражениях дополнительных ограничителей в виде скобок не требуется. Например, в формуле

$$[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d}]$$

сначала вычисляются суммы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ , лишь затем выполняется векторное умножение.

**Примечание.** Часто для обозначения векторного произведения используется запись  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . В англоязычной литературе даже имеется термин «cross product» (умножение крестиком). На мой взгляд такое обозначение является неудачным. Оно вносит путаницу, ибо крестик может ставиться при умножении чисел, когда большая формула делится на части и одна из частей переносится на другую строку.

**Примечание.** Физическая природа векторного произведения  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  часто отличается от физической природы его сомножителей  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Даже в том случае, когда длины векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  измеряются в единицах длины, длина векторного произведения  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  измеряется в единицах площади.

**УПРАЖНЕНИЕ 35.1.** *Покажите, что векторное произведение  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  двух свободных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является свободным сектором и, как свободный вектор, не зависит от места расположения точки  $O$ , изображённой на рисунке 35.1.*

### § 36. Ортогональная проекция на плоскость.

Пусть  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  — некоторый ненулевой свободный вектор. Согласно теореме 27.1 всякий свободный вектор  $\mathbf{b}$  имеет относительно вектора  $\mathbf{a}$  разложение вида

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}, \quad (36.1)$$

в котором вектор  $\mathbf{b}_{\parallel}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ , а вектор  $\mathbf{b}_{\perp}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{a}$ . Через  $\pi_{\mathbf{a}}$  мы обозначили отображение, которое каждому вектору  $\mathbf{b}$  ставит в соответствие компоненту  $\mathbf{b}_{\parallel}$  в разложении (36.1). Такое отображение было названо ортогональным проектированием на направление вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  (см. определение 27.3).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.1.** Отображение  $\pi_{\perp\mathbf{a}}$ , которое каждому свободному вектору  $\mathbf{b}$  ставит в соответствие его компоненту  $\mathbf{b}_{\perp}$  в разложении (36.1), называется *ортогональным проектированием на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$* ,

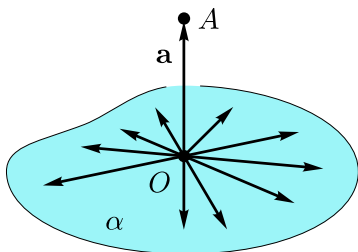


или, что более точно, *ортогональным проектированием на ортогональное дополнение вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ .*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36.2.** *Ортогональным дополнением* свободного вектора  $\mathbf{a}$  называется совокупность всех свободных векторов  $\mathbf{x}$ , которые перпендикулярны вектору  $\mathbf{a}$ :

$$\alpha = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \perp \mathbf{a}\}. \quad (36.2)$$

Ортогональное дополнение (36.2) ненулевого вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  можно визуализировать в виде плоскости, если выбрать одну



из его геометрических реализаций  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ . Действительно, отложим от точки  $O$  всевозможные векторы, перпендикулярные вектору  $\mathbf{a}$ . Концы таких векторов заполняют плоскость  $\alpha$  на рисунке 36.1.

Рис. 36.1

Свойства отображений ортогонального проектирования на прямую  $\pi_{\mathbf{a}}$  из определения 27.1 и ортогонального проек-

тирования  $\pi_{\perp \mathbf{a}}$  на плоскость из определения 36.1 очень похожи. А именно, справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 36.1.** *Для всякого ненулевого вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  отображение ортогонального проектирования  $\pi_{\perp \mathbf{a}}$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{a}$ , есть линейное отображение.*

**ДОК-ВО.** Для доказательства теоремы перепишем соотношение (36.1) следующим образом:

$$\mathbf{b} = \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) + \pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{b}). \quad (36.3)$$

Соотношение (36.3) является тождеством, оно выполнено для любого вектора  $\mathbf{b}$ . Сначала заменим  $\mathbf{b}$  на  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$  в (36.3), затем

заменим  $\mathbf{b}$  на  $\alpha \mathbf{b}$  в этом же соотношении. В результате таких замен получатся следующие два соотношения:

$$\pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad (36.4)$$

$$\pi_{\perp \mathbf{a}}(\alpha \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{b} - \pi_{\mathbf{a}}(\alpha \mathbf{b}). \quad (36.5)$$

В силу теоремы 27.3 отображение  $\pi_{\mathbf{a}}$  является линейным отображением. По этой причине соотношения (36.4) и (36.5) можно преобразовать к виду

$$\pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{b} - \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) + \mathbf{c} - \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}), \quad (36.6)$$

$$\pi_{\perp \mathbf{a}}(\alpha \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{b} - \pi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})). \quad (36.7)$$

Остаётся применить тождество (36.3) к соотношениям (36.6) и (36.7). В результате этого получим

$$\pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{b}) + \pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{c}), \quad (36.8)$$

$$\pi_{\perp \mathbf{a}}(\alpha \mathbf{b}) = \alpha \pi_{\perp \mathbf{a}}(\mathbf{b}). \quad (36.9)$$

Соотношения (36.8) и (36.9) — это в точности условия линейности из определения 27.4, записанные для отображения  $\pi_{\perp \mathbf{a}}$ . Теорема 36.1 доказана.  $\square$

### § 37. Поворот вокруг оси.

Пусть  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  — некоторый ненулевой свободный вектор и пусть  $\mathbf{b}$  — некоторый произвольный свободный вектор. Отложим от некоторой произвольной точки  $B$  вектор  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BO}$ . Затем отложим от конца вектора  $\overrightarrow{BO}$  вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ . Вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  отличен от нуля. Поэтому он определяет прямую  $OA$ , которую возьмём за ось вращения. Обозначим через  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}$  отображение поворота пространства  $\mathbb{E}$  вокруг оси  $OA$  на угол  $\varphi$  (см. рисунок 37.1 ниже). Вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  выделяет одно из двух возможных направлений на оси поворота. Одновременно с этим он определяет положительное направление вращения вокруг оси  $OA$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37.1. Принято считать, что поворот вокруг оси  $OA$  с выделенным на ней направлением  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  выполняется в положительном направлении, если при наблюдении с конца вектора  $\overrightarrow{OA}$ , т. е. при взгляде от точки  $A$  в сторону точки  $O$ , этот поворот происходит против часовой стрелки.

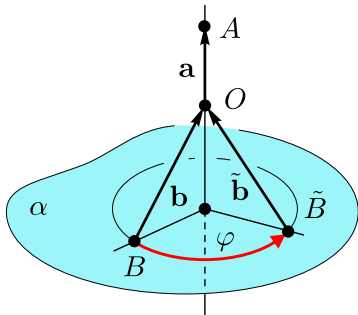


Рис. 37.1

С учётом определения 37.1 угол поворота  $\varphi$  можно считать знаковой величиной. Если  $\varphi > 0$ , то поворот  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}$  выполняется в положительном направлении по отношению к вектору  $\mathbf{a}$ , если  $\varphi < 0$ , то в отрицательном направлении.

Применим отображение  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}$  к векторам  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BO}$  на рисунке 37.1. Точки  $A$  и  $O$  лежат на оси поворота. По этой причине при повороте точки  $A$  и  $O$  останутся на месте и вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  не изменится. А вектор  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BO}$  перейдёт в вектор  $\overrightarrow{B\tilde{O}}$ . Теперь при помощи параллельных переносов геометрический вектор  $\overrightarrow{B\tilde{O}}$  можно растиражировать до свободного вектора  $\tilde{\mathbf{b}} = \overrightarrow{B\tilde{O}}$  (см. определения 4.1 и 4.2). Про вектор  $\tilde{\mathbf{b}}$  принято говорить, что он получен из вектора  $\mathbf{b}$  в результате применения отображения  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}$  и записывать

$$\tilde{\mathbf{b}} = \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b}). \tag{37.1}$$

ЛЕММА 37.1. Свободный вектор  $\tilde{\mathbf{b}} = \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b})$  в (37.1), полученный из свободного вектора  $\mathbf{b}$  при помощи поворота  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}$  не зависит от выбора геометрической реализации вектора  $\mathbf{a}$ , определяющего ось поворота, и от выбора геометрической реализации самого вектора  $\mathbf{b}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37.2.** Отображение  $\theta_{\mathbf{a}}^\varphi$ , применяемое к свободным векторам пространства  $\mathbb{E}$  и переводящее их в другие свободные вектора пространства  $\mathbb{E}$ , называется поворотом на угол  $\varphi$  вокруг вектора  $\mathbf{a}$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 37.1.** Повороты и параллельные переносы относятся к классу отображений, сохраняющих длины отрезков и величины углов. Они переводят каждый отрезок в конгруэнтный ему отрезок и каждый угол в конгруэнтный ему угол (см. [6]). Пусть  $p$  — некоторый параллельный перенос,  $p^{-1}$  — обратный ему параллельный перенос, и пусть  $\theta$  — поворот на некоторый угол вокруг некоторой оси. Исходя из сказанного выше, докажите, что композиция трёх отображений  $\tilde{\theta} = p \circ \theta \circ p^{-1}$  является поворотом на тот же угол вокруг оси, полученной из оси поворота  $\theta$  при действии на неё параллельного переноса  $p$ .

**УПРАЖНЕНИЕ 37.2.** Примените результат упражнения 37.1 для доказательства леммы 37.1.

**ТЕОРЕМА 37.1.** Для всякого ненулевого свободного вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и для любого угла  $\varphi$  отображение поворота  $\theta_{\mathbf{a}}^\varphi$  свободных векторов на угол  $\varphi$  вокруг вектора  $\mathbf{a}$  является линейным отображением.

**ДОК-ВО.** Для доказательства теоремы надо проверить выполнение условий 1) и 2) из определения 27.4 для отображения  $\theta_{\mathbf{a}}^\varphi$ . Начнём с первого из этих условий. Пусть  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — два свободных вектора. Построим их геометрические реализации  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$  и  $\mathbf{c} = \overrightarrow{CO}$ . При этом вектор  $\overrightarrow{BO}$  будет геометрической реализацией суммы векторов  $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ .

Далее построим геометрическую реализацию вектора  $\mathbf{a}$ . Она определит ось поворота. Согласно лемме 37.1 местоположение геометрической реализации вектора  $\mathbf{a}$  значения не имеет. Но для определённости можно выбрать  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ .

Применим поворот на угол  $\varphi$  вокруг прямой  $OA$  к точкам  $B$ ,  $C$  и  $O$ . Точка  $O$  лежит на оси поворота. Поэтому она

останется на месте. Точки  $B$  и  $C$  перейдут в точки  $\tilde{B}$  и  $\tilde{C}$  соответственно, а треугольник  $BCO$  перейдёт в треугольник  $\tilde{B}\tilde{C}O$ . Это даёт следующие соотношения для векторов:

$$\begin{aligned}\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{\tilde{B}\tilde{C}}, \\ \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\overrightarrow{CO}) &= \overrightarrow{\tilde{C}O}, \\ \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\overrightarrow{BO}) &= \overrightarrow{\tilde{B}O}.\end{aligned}\tag{37.2}$$

Но вектора  $\overrightarrow{\tilde{B}\tilde{C}}$  и  $\overrightarrow{\tilde{C}O}$  в (37.2) являются геометрическими реализациями векторов  $\tilde{\mathbf{b}} = \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b})$  и  $\tilde{\mathbf{c}} = \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{c})$ , а  $\overrightarrow{\tilde{B}O}$  — это геометрическая реализация вектора  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ . Отсюда

$$\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{\tilde{B}O} = \overrightarrow{\tilde{B}\tilde{C}} + \overrightarrow{\tilde{C}O} = \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b}) + \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{c}).\tag{37.3}$$

Цепочка равенств (37.3) доказывает первое условие линейности из определения 27.4.

Перейдём к доказательству второго условия линейности. Оно проще доказательства первого условия. Умножение вектора  $\mathbf{b}$  на число  $\alpha$  приводит к изменению длины его геометрической реализации в  $|\alpha|$  раз. При этом геометрическая реализация вектора  $\alpha \mathbf{b}$  сонаправлена геометрической реализации вектора  $\mathbf{b}$  при  $\alpha > 0$  и противоположно направлена ей при  $\alpha < 0$ . В случае  $\alpha = 0$  геометрическая реализация вектора  $\alpha \mathbf{b}$  зануляется. Применим поворот на угол  $\varphi$  вокруг некоторой геометрической реализации вектора  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  к геометрическим реализациям векторов  $\mathbf{b}$  и  $\alpha \mathbf{b}$ . Такое отображение сохраняет длины векторов, а значит и соотношения между длинами векторов. Кроме того, оно переводит прямые в прямые, сохраняя порядок следования точек на этих прямых. Поэтому сонаправленные векторы при поворотах переходят в сонаправленные, а противоположно направленные векторы — в противоположно направленные. Отсюда

$$\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\alpha \mathbf{b}) = \alpha \theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}(\mathbf{b}).\tag{37.4}$$

Соотношение (37.4) завершает доказательство линейности отображения  $\theta_{\mathbf{a}}^{\varphi}$  в множестве свободных векторов.  $\square$

### § 38. Связь векторного произведения с проекциями и поворотами.

Рассмотрим два неколлинеарных вектора  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  и их векторное произведение  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Длина вектора  $\mathbf{c}$  определяется длинами векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а также углом  $\varphi$  между ними:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi. \quad (38.1)$$

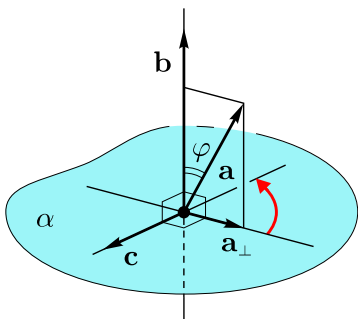


Рис. 38.1

Вектор  $\mathbf{c}$  лежит в плоскости  $\alpha$ , перпендикулярной вектору  $\mathbf{b}$  (см. рисунок 38.1). Обозначим через  $\mathbf{a}_{\perp}$  ортогональную проекцию вектора  $\mathbf{a}$  на плоскость  $\alpha$ , т. е. положим

$$\mathbf{a}_{\perp} = \pi_{\perp \mathbf{b}}(\mathbf{a}). \quad (38.2)$$

Длина вектора (38.2) определяется формулой  $|\mathbf{a}_{\perp}| = |\mathbf{a}| \sin \varphi$ . Из сравнения этой формулы с (38.1) и из рисунка 38.1 делаем вывод, что для совмещения вектора  $\mathbf{a}_{\perp}$  с вектором  $\mathbf{c}$  надо повернуть его против часовой стрелки на прямой угол вокруг вектора  $\mathbf{b}$ , после чего умножить на отрицательное число  $-|\mathbf{b}|$ . Это даёт

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -|\mathbf{b}| \cdot \theta_{\mathbf{b}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{b}}(\mathbf{a})). \quad (38.3)$$

Формула (38.3) устанавливает связь между векторным произведением и двумя отображениями  $\pi_{\perp \mathbf{b}}$  и  $\theta_{\mathbf{b}}^{\pi/2}$ , одно из которых — это проектирование на ортогональное дополнение к вектору  $\mathbf{b}$ , а другое — поворот на угол  $\pi/2$  вокруг вектора  $\mathbf{b}$ . Условием применимости этой формулы является условие

$$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \quad (38.4)$$

а ограничение  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  может быть снято. При  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  обе части формулы (38.4) обращаются в ноль, но сама формула при этом остаётся верной.

### § 39. Свойства векторного произведения.

**ТЕОРЕМА 39.1.** *Векторное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами, которые выполняются для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и любого числа  $\alpha$ :*

- 1)  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$ ;
- 2)  $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ;
- 3)  $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ ;
- 4)  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, т. е. когда  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39.1.** Свойство 1) в теореме 39.1 называется свойством *антикоммутативности*, свойства 2) и 3) называются свойствами *линейности по первому сомножителю*, свойство 4) называется *условием зануления*.

**ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 39.1.** Свойство антикоммутативности 1) выводится непосредственно из определения 35.1. Пусть  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ . Перестановка векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не нарушает первого и третьего условий в определении 35.1. А вот направление поворота на рисунке 35.1 меняется на противоположное. Поэтому, если тройка  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  правая, то тройка  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$  уже левая. Для получения правой тройки из векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a}$ , их следует дополнить вектором  $-\mathbf{c}$ . Это даёт требуемое равенство

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \quad (39.1)$$

для случая  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ . В случае коллинеарности сомножителей  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  обе части равенства (39.1) зануляются и оно оказывается тривиальным образом выполненным.

Пусть  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ . Свойства линейности 1) и 2) для этого случая выводятся с использованием формулы (38.3) и теорем 36.1 и

37.1. Запишем формулу (38.3) в следующем виде:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = -|\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{a})). \quad (39.2)$$

Заменяем вектор  $\mathbf{a}$  в формуле (39.2) на сумму векторов  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . После этого применим теоремы 36.1 и 37.1, что даёт

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= -|\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})) = -|\mathbf{c}| \cdot \\ &\cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{a}) + \pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{b})) = -|\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{a})) - \\ &- |\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{b})) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]. \end{aligned}$$

Теперь заменим вектор  $\mathbf{a}$  в формуле (39.2) на произведение  $\alpha \mathbf{a}$ , после чего снова применим теоремы 36.1 и 37.1:

$$\begin{aligned} [\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}] &= -|\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\alpha \mathbf{a})) = -|\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\alpha \pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{a})) = \\ &= -\alpha |\mathbf{c}| \cdot \theta_{\mathbf{c}}^{\pi/2}(\pi_{\perp \mathbf{c}}(\mathbf{a})) = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{c}]. \end{aligned}$$

Проделанные вычисления доказывают равенства 2) и 3) в теореме 39.1 для случая  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ . В случае  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  обе части этих равенств зануляются и они оказываются тривиальным образом выполненными.

Перейдём к доказательству четвёртого пункта в теореме 39.1. При  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  зануляется по определению 35.1. Пусть  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ . Это означает, что вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  отличны от нуля, а угол  $\varphi$  между ними отличен от 0 и от  $\pi$ . По этой причине  $\sin \varphi \neq 0$ . В силу перечисленных обстоятельств условие 3) из определения 35.1 даёт

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi \neq 0,$$

т.е. при  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$  векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  не может занулиться. Это завершает доказательство теоремы 39.1.  $\square$

**ТЕОРЕМА 39.2.** *Кроме свойств 1)–4), векторное произведе-*



ние обладает следующими двумя свойствами, которые выполнены для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и для любого числа  $\alpha$ :

- 5)  $[\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ ;  
 6)  $[\mathbf{c}, \alpha \mathbf{a}] = \alpha [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39.2. Свойства 5) и 6) в теореме 39.2 называются свойствами *линейности по второму сомножителю*.

Свойства 5) и 6) легко выводятся из свойств 2) и 3) при помощи свойства 1). Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} [\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] &= -[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{c}, \mathbf{b}], \\ [\mathbf{c}, \alpha \mathbf{a}] &= -[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -\alpha [\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \alpha [\mathbf{c}, \mathbf{a}]. \end{aligned}$$

Эти вычисления доказывают теорему 39.2.

#### § 40. Структурные константы векторного произведения.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый произвольный базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Возьмём два вектора  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_j$  из этого базиса и рассмотрим их векторное произведение  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$ . Вектор  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$  можно разложить по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Такое разложение принято записывать следующим образом:

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = C_{ij}^1 \mathbf{e}_1 + C_{ij}^2 \mathbf{e}_2 + C_{ij}^3 \mathbf{e}_3. \quad (40.1)$$

Разложение (40.1) содержит три коэффициента  $C_{ij}^1, C_{ij}^2$  и  $C_{ij}^3$ . Однако индексы  $i$  и  $j$  в нём пробегают три значения 1, 2, 3 независимо друг от друга. Поэтому фактически формула (40.1) задаёт девять разложений, а общее число коэффициентов в ней равно двадцати семи.

Формулу (40.1) можно записать в сокращённом виде

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^3 C_{ij}^k \mathbf{e}_k. \quad (40.2)$$

Применим теорему о единственности разложения вектора по базису 19.1 к разложениям векторов  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$  в (40.1) или (40.2). Это позволяет сформулировать следующий результат.

**ТЕОРЕМА 40.1.** *С каждым базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  связан некоторый набор из двадцати семи констант  $C_{ij}^k$ , который однозначно определяется данным базисом при помощи разложений (40.2).*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40.1.** Константы  $C_{ij}^k$ , однозначно определяемые базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  при помощи разложений (40.2), называются *структурными константами векторного произведения* для базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Структурные константы векторного произведения подобны компонентам матрицы Грама для базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (см. определение 29.2). Но они более многочисленны и образуют трёхиндексный массив с двумя нижними и одним верхним индексом. По этой причине их нельзя разместить в матрицу.

#### § 41. Вычисление векторного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый косоугольный базис. Согласно определению 29.1 термин *косоугольный базис* в этой книге используется как синоним произвольного базиса. Выберем два произвольных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в пространстве  $\mathbb{E}$  и рассмотрим их разложения в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j. \quad (41.1)$$

Подстановка (41.1) в векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  даёт

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[ \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j \right]. \quad (41.2)$$

Для преобразования формулы (41.2) применим свойства векторного произведения 2) и 5) из теорем 39.1 и 39.2. Эти свойства позволяют вынести знаки суммирования по  $i$  и  $j$  за скобки векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 [a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j]. \quad (41.3)$$

Далее применим свойства 3) и 6) из теорем 39.1 и 39.2. Они позволяют вынести числовые множители  $a^i$  и  $b^j$  за скобки векторного произведения в (41.3):

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i b^j [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]. \quad (41.4)$$

Векторы  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$  в формуле (41.4) можно заменить их разложениями (40.2). После подстановки (40.2) в (41.4) формула (41.4) принимает следующий вид:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j C_{ij}^k \mathbf{e}_k. \quad (41.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41.1.** Формула (41.5) называется формулой для вычисления векторного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

### § 42. Структурные константы векторного произведения в ортонормированном базисе.

Напомню, что ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве  $\mathbb{E}$  называется базис, составленный из трёх единичных по длине и перпендикулярных друг другу векторов (см. определение 31.3). По своей ориентации тройки некомпланарных векторов в пространстве  $\mathbb{E}$  бывают правыми и левыми

(см определение 34.4). Это определяет деление всех базисов в пространстве  $\mathbb{E}$  на правые и левые, что относится и к ортонормированным базисам.

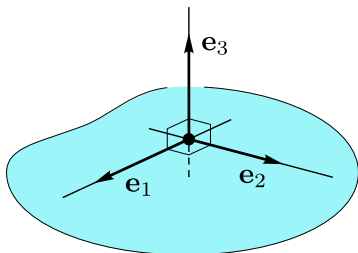


Рис. 42.1

Рассмотрим некоторый ортонормированный правый базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Он изображён на рисунке 42.1. Используя определение 35.1, можно вычислить всевозможные попарные векторные произведения векторов этого базиса. Простая геометрия правого ОНБ

позволяет выполнить такие вычисления в явном виде и составить таблицу умножения для базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] &= \mathbf{0}, & [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] &= \mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] &= -\mathbf{e}_2, \\ [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] &= -\mathbf{e}_3, & [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] &= \mathbf{0}, & [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] &= \mathbf{e}_1, \\ [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] &= \mathbf{e}_2, & [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2] &= -\mathbf{e}_1, & [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3] &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (42.1)$$

Выберем первое из соотношений (42.1) и запишем его правую часть в виде разложения по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3. \quad (42.2)$$

Сравним разложение (42.2) с разложением (40.1), которое запишем для случая  $i = 1$  и  $j = 1$ :

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] = C_{11}^1 \mathbf{e}_1 + C_{11}^2 \mathbf{e}_2 + C_{11}^3 \mathbf{e}_3. \quad (42.3)$$

В силу единственности разложения вектора по базису (см. теорему 19.1) из (42.2) и (42.3) выводим

$$C_{11}^1 = 0, \quad C_{11}^2 = 0, \quad C_{11}^3 = 0. \quad (42.4)$$

Теперь выберем второе соотношение (42.1) и запишем его правую часть в виде разложения по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 0 \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2 + 1 \mathbf{e}_3. \quad (42.5)$$

Сравнив (42.5) с разложением (40.1), записанным для случая  $i = 1$  и  $j = 2$ , получим значения следующих констант:

$$C_{12}^1 = 0, \quad C_{12}^2 = 0, \quad C_{12}^3 = 1. \quad (42.6)$$

Повторяя эту процедуру для всех соотношений (42.1), можно получить полный набор соотношений, аналогичных (42.4) и (42.6), а затем записать их в один общий список:

$$\begin{array}{lll} C_{11}^1 = 0, & C_{11}^2 = 0, & C_{11}^3 = 0, \\ C_{12}^1 = 0, & C_{12}^2 = 0, & C_{12}^3 = 1, \\ C_{13}^1 = 0, & C_{13}^2 = -1, & C_{13}^3 = 0, \\ C_{21}^1 = 0, & C_{21}^2 = 0, & C_{21}^3 = -1, \\ C_{22}^1 = 0, & C_{22}^2 = 0, & C_{22}^3 = 0, \\ C_{23}^1 = 1, & C_{23}^2 = 0, & C_{23}^3 = 0, \\ C_{31}^1 = 0, & C_{31}^2 = 1, & C_{31}^3 = 0, \\ C_{32}^1 = -1, & C_{32}^2 = 0, & C_{32}^3 = 1, \\ C_{33}^1 = 0, & C_{33}^2 = 0, & C_{33}^3 = 0. \end{array} \quad (42.7)$$

Формулы (42.7) определяют все 27 структурных констант векторного произведения для ортонормированного правого базиса. Запишем этот результат в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 42.1.** *Для всякого правого ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  структурные константы векторного произведения определяются формулами (42.7).*

**ТЕОРЕМА 42.2.** *Для всякого левого ортонормированного*

базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  структурные константы векторного произведения получаются из (42.7) путём смены знаков «+» на «-» и наоборот.

УПРАЖНЕНИЕ 42.1. Нарисуйте ортонормированный левый базис и, применяя определение 35.1 к попарным произведениям базисных векторов, выведите соотношения, аналогичные (42.1). Затем докажите теорему 42.2.

### § 43. Символ Леви-Чивита.

Рассмотрим формулы (42.7) для структурных констант векторного произведения в правом ортонормированном базисе. В них легко разглядеть следующую закономерность:

$$C_{ij}^k = 0, \text{ если среди значений индексов есть совпадающие.} \quad (43.1)$$

Условие (43.1) описывает все случаи зануления структурных констант в (42.7). Случаи  $C_{ij}^k = 1$  описываются условием

$$C_{ij}^k = 1, \text{ если индексы } i, j, k \text{ принимают значения } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ или } (3, 1, 2). \quad (43.2)$$

И наконец, случаи  $C_{ij}^k = -1$  описываются условием

$$C_{ij}^k = -1, \text{ если индексы } i, j, k \text{ принимают значения } (1, 3, 2), (3, 2, 1), \text{ или } (2, 1, 3). \quad (43.3)$$

Тройки чисел из (43.2) и (43.3) составляют полный набор из всевозможных перестановок чисел 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3), & \quad (2, 3, 1), & \quad (3, 1, 2), \\ (1, 3, 2), & \quad (3, 2, 1), & \quad (2, 1, 3). \end{aligned} \quad (43.4)$$

Первые три перестановки в (43.4) называются *чётными*. Они получаются из правильной расстановки чисел 1, 2, 3 в порядке возрастания применением чётного перестановок пары

чисел. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3); \\ &(1, 2, 3) \xrightarrow{1} (2, 1, 3) \xrightarrow{2} (2, 3, 1); \\ &(1, 2, 3) \xrightarrow{1} (1, 3, 2) \xrightarrow{2} (3, 1, 2). \end{aligned}$$

Оставшиеся три перестановки в (43.4) называются *нечётными*. В случае этих трёх перестановок мы имеем

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3) \xrightarrow{1} (1, 3, 2); \\ &(1, 2, 3) \xrightarrow{1} (3, 2, 1); \\ &(1, 2, 3) \xrightarrow{1} (2, 1, 3). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43.1. Перестановки (43.4) составляют множество, которое обычно обозначают через  $S_3$ . Если  $\sigma \in S_3$ , то через  $(-1)^\sigma$  обозначают чётность перестановки  $\sigma$ :

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ чётная;} \\ -1, & \text{если перестановка } \sigma \text{ нечётная.} \end{cases}$$

Нули, единицы и минус единицы из (43.1), (43.2) и (43.3) принято объединить в один числовой массив:

$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если среди значений индексов } i, j, k \text{ есть совпадающие;} \\ 1, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ образуют чётную перестановку чисел } 1, 2, 3; \\ -1, & \text{если значения индексов } i, j, k \text{ образуют нечётную перестановку чисел } 1, 2, 3. \end{cases} \quad (43.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43.2. Числовой массив  $\varepsilon$ , определяемый формулой (43.5), называется символом Леви-Чивита.

При записи компонент символа Леви-Чивита используют три верхних либо три нижних индекса. Этим подчеркивается равноправность всех трёх индексов в символе Леви-Чивита. Размещение индексов на разных уровнях в символе Леви-Чивита не приветствуется. С учётом сказанного формулы (43.1), (43.2) и (43.3) записываются так:

$$C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}. \quad (43.6)$$

**ТЕОРЕМА 43.1.** *Для всякого правого ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  структурные константы векторного произведения в таком базисе определяются равенством (43.6).*

В случае левого ортонормированного базиса имеет место теорема 42.2. Из неё вытекает равенство

$$C_{ij}^k = -\varepsilon_{ijk}. \quad (43.7)$$

**ТЕОРЕМА 43.2.** *Для всякого левого ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  структурные константы векторного произведения в таком базисе определяются равенством (43.7).*

Заметим, что равенства (43.6) и (43.7) нарушают правило расстановки индексов, изложенное в определении 24.9. Дело в том, что структурные константы векторного произведения  $C_{ij}^k$  — это компоненты геометрического объекта. Положение индексов для них определяется соглашением о расстановке индексов, известным как эйнштейновская тензорная нотация (см. определение 20.1). А символ Леви-Чивита — это массив чисел чисто алгебраического происхождения.

Важнейшим свойством символа Леви-Чивита является его *полная кососимметричность* или *полная антисимметричность*. Оно выражается следующими равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{jik}, & \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{ikj}, & \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{kji}, \\ \varepsilon^{ijk} &= -\varepsilon^{jik}, & \varepsilon^{ijk} &= -\varepsilon^{ikj}, & \varepsilon^{ijk} &= -\varepsilon^{kji}. \end{aligned} \quad (43.8)$$



Соотношения (43.8) означают, что при перестановке любой пары индексов величина  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$  меняет знак. Эти соотношения легко выводятся из (43.5).

#### § 44. Вычисление векторного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе.

Напомню, что термин *косогольный базис* в этой книге используется как синоним произвольного базиса (см. определение 29.1). Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — правый ортонормированный базис. Его можно рассматривать как частный случай косогольного базиса. Подстановка (43.6) в формулу (41.5) даёт

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \quad (44.1)$$

Здесь  $a^i$  и  $b^j$  — координаты векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Для упрощения формулы (44.1) заметим, что большая часть компонент символа Леви-Чивита равна нулю. Из двадцати семи его компонент отличны от нуля только шесть. Используя формулу (43.5), можно привести (44.1) к виду

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a^1 b^2 \mathbf{e}_3 + a^2 b^3 \mathbf{e}_1 + a^3 b^1 \mathbf{e}_2 - \\ - a^2 b^1 \mathbf{e}_3 - a^3 b^2 \mathbf{e}_1 - a^1 b^3 \mathbf{e}_2. \quad (44.2)$$

После приведения подобных слагаемых формула (44.2) даёт

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{e}_1 (a^2 b^3 - a^3 b^2) - \\ - \mathbf{e}_2 (a^1 b^3 - a^3 b^1) + \mathbf{e}_3 (a^1 b^2 - a^2 b^1). \quad (44.3)$$

Далее из формулы (44.3) выводим

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}. \quad (44.4)$$

При выводе формулы (44.4) используется формула для определителя матрицы размером  $2 \times 2$  (см. [7]). Выражения в круглых скобках в формуле (44.3) заменены определителями таких матриц.

Заметим, что правая часть формулы (44.4) — это разложение определителя матрицы  $3 \times 3$  по первой строке (см. [7]). Поэтому эту формулу можно записать так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}. \quad (44.5)$$

Здесь  $a^1, a^2, a^3$  и  $b^1, b^2, b^3$  — координаты векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Они заполняют вторую и третью строки в определителе (44.5).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44.1.** Формулы (44.1) и (44.5) называются формулами для вычисления векторного произведения по координатам векторов в правом ортонормированном базисе.

Перейдём к случаю левого ортонормированного базиса. В этом случае структурные константы векторного произведения задаются формулой (43.7). Подстановка (43.7) в (41.5) даёт

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \quad (44.6)$$

Затем из (44.6) выводится формула

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}. \quad (44.7)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44.2.** Формулы (44.6) и (44.7) называются формулами для вычисления векторного произведения по

координатам векторов в левом ортонормированном базисе.

### § 45. Смешанное произведение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45.1.** *Смешанным произведением* трёх свободных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  называется число, которое получается в результате скалярного умножения вектора  $\mathbf{a}$  на векторное произведение векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \quad (45.1)$$

Как видно из формулы (45.1), смешанное произведение всегда имеет три сомножителя. Они отделяются друг от друга двумя запятыми. Запятые выполняют роль знаков умножения в смешанном произведении, но не сами по себе, а совместно с окружающими их круглыми скобками.

Запятые и скобки в записи смешанного произведения служат естественными ограничителями, которыми выделяются сомножители в этом произведении: в промежутке от открывающей скобки до первой запятой располагается первый сомножитель, от первой запятой до второй запятой располагается второй сомножитель, а от второй запятой до закрывающей скобки — третий сомножитель. Поэтому в сложных выражениях дополнительных ограничителей в виде скобок не требуется. Например, в формуле

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{d}, \mathbf{e} + \mathbf{f})$$

сначала вычисляются суммы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c} + \mathbf{d}$  и  $\mathbf{e} + \mathbf{f}$ , лишь затем выполняется смешанное умножение.

### § 46. Вычисление смешанного произведения по координатам векторов в ортонормированном базисе.

Формула (45.1) сводит вычисление смешанного произведения к вычислению векторного и скалярного произведений. А

в случае векторного и скалярного произведений у нас уже есть достаточно эффективные формулы для их вычисления по координатам векторов в ортонормированном базисе.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — правый ортонормированный базис и пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — три свободных вектора, заданных своими координатами в этом базисе:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}. \quad (46.1)$$

Обозначим  $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ . Тогда формула (45.1) запишется как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}). \quad (46.2)$$

Для вычисления вектора  $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$  применим формулу (44.1), которую запишем в следующем виде:

$$\mathbf{d} = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b^i c^j \varepsilon_{ijk} \right) \mathbf{e}_k. \quad (46.3)$$

Формула (46.3) представляет собой разложение вектора  $\mathbf{d}$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , а коэффициенты в этом разложении являются координатами вектора  $\mathbf{d}$ :

$$d^k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b^i c^j \varepsilon_{ijk}. \quad (46.4)$$

Следующий шаг состоит в использовании координат вектора  $\mathbf{d}$  из (46.4) для вычисления скалярного произведения в правой части (46.2). Формула (33.3) записывается в виде

$$(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \sum_{k=1}^3 a^k d^k. \quad (46.5)$$

Подставим (46.4) в (46.5) и учтём (46.2). Это даёт

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 a^k \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b^i c^j \varepsilon_{ijk} \right). \quad (46.6)$$

После раскрытия скобок в правой части и смены порядка суммирования формула (46.6) приводится к виду

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 b^i c^j \varepsilon_{ijk} a^k. \quad (46.7)$$

Заметим, что правая часть формулы (46.7) отличается от правой части формулы (44.1) заменой  $a^i$  на  $b^i$ , заменой  $b^j$  на  $c^j$  и заменой  $e_k$  на  $a^k$ . По этой причине формула (46.7) приводится к следующему виду, аналогичному (44.5):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (46.8)$$

Другой способ преобразования формулы (46.7) — это использование свойства полной кососимметричности символа Леви-Чивита (43.8). Из него получаем  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ . При учёте этого соотношения после смены порядка сомножителей и переобозначения индексов суммирования в правой части формула (46.7) приводится к виду

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k \varepsilon_{ijk}. \quad (46.9)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46.1.** Формулы (46.8) и (46.9) называются формулами для вычисления смешанного произведения по координатам векторов в правом ортонормированном базисе.

Координаты векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , используемые в формулах (46.8) и (46.9) берутся из (46.1).

Перейдём к случаю левого ортонормированного базиса. Аналоги формул (46.8) и (46.9) для этого случая получаются простой сменой знака в формулах (46.8) и (46.9):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = - \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (46.10)$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k \varepsilon_{ijk}. \quad (46.11)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46.2.** Формулы (46.10) и (46.11) называются формулами для вычисления смешанного произведения по координатам векторов в левом ортонормированном базисе.

Справедливость формул (46.10) и (46.11) вытекает из теоремы 42.2 либо из сравнения формул (43.6) и (43.7).

### § 47. Свойства смешанного произведения.

**ТЕОРЕМА 47.1.** *Смешанное произведение векторов обладает следующими четырьмя свойствами, которые выполняются для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  и любого числа  $\alpha$ :*

- 1)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ ,  
 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ ,  
 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$ ;
- 2)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ ;
- 3)  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ ;
- 4)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$  тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47.1.** Свойство 1) выраженное тремя равенствами в теореме 47.1 называется свойством *полной антисимметричности*.

*тисимметричности* или *полной кососимметричности*, свойства 2) и 3) называются свойствами *линейности по первому сомножителю*, свойство 4) называется *условием зануления*.

ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 47.1. Первое из равенств, входящих в состав свойства полной антисимметричности 1), вытекает из формулы (45.1) и из теорем 39.1 и 28.1:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, -[\mathbf{c}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Два других равенства, входящих в состав свойства 1), таким способом вывести нельзя. Поэтому приходится использовать формулу (46.8). Перестановке любых двух векторов в левой части этой формулы соответствует перестановка двух строк определителя в правой части этой формулы. Но перестановка двух строк определителя всегда ведёт к смене знака этого определителя. Отсюда вытекают сразу все три равенства, составляющие свойство полной антисимметричности смешанного произведения.

Свойства линейности смешанного произведения 2) и 3) в теореме 47.1 выводятся из соответствующих свойств скалярного произведения в силу формулы (45.1):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) + \\ &+ (\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}), \\ (\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &= (\alpha \mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \alpha (\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Перейдём к доказательству четвёртого свойства смешанного произведения в теореме 47.1. Пусть вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны. Тогда они параллельны некоторой плоскости  $\alpha$  в пространстве  $\mathbb{E}$  и можно выбрать их геометрические реализации, лежащие в плоскости  $\alpha$ . Если  $\mathbf{b} \nparallel \mathbf{c}$ , то векторное произведение  $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$  отлично от нуля и перпендикулярно плоскости  $\alpha$ . А вектор  $\mathbf{a}$  параллелен этой плоскости. Отсюда  $\mathbf{d} \perp \mathbf{a}$ , что даёт  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}) = 0$ .

Если  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ , то векторное произведение  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$  равно нулю и зануление  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$  вытекает из  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$  в силу исходной формулы (45.1) для смешанного произведения.

Наоборот, пусть  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ . Если  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ , то вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  задают не более двух направлений в пространстве  $\mathbb{E}$ . А для двух прямых в этом пространстве всегда найдётся плоскость, которой эти прямые параллельны. Это означает, что вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны.

Если  $\mathbf{b} \not\parallel \mathbf{c}$ , то  $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq \mathbf{0}$ . Отложив геометрические реализации векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  от некоторой общей точки  $O$ , мы легко построим плоскость  $\alpha$ , в которой лежат эти геометрические реализации. А вектор  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$  будет перпендикуляром к этой плоскости. Далее из  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}) = 0$  выводим  $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$ , что даёт  $\mathbf{a} \parallel \alpha$ . Векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  также параллельны плоскости  $\alpha$ , поскольку их геометрические реализации лежат в этой плоскости. Значит все три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  параллельны плоскости  $\alpha$ , что означает их компланарность. Теорема 47.1 полностью доказана.  $\square$

**ТЕОРЕМА 47.2.** *Кроме свойств 1)–4), смешанное произведение обладает следующими четырьмя свойствами, которые выполнены для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  и любого числа  $\alpha$ :*

- 5)  $(\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{d});$
- 6)  $(\mathbf{c}, \alpha \mathbf{a}, \mathbf{d}) = \alpha (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d});$
- 7)  $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b});$
- 8)  $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \alpha \mathbf{a}) = \alpha (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}).$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47.2.** Свойства 5) и 6) в теореме 47.2 называются свойствами *линейности по второму сомножителю*, а свойства 7) и 8) называются свойствами *линейности по третьему сомножителю*.

Свойство 5) выводятся из свойства 2) в теореме 47.1:

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d}) &= -(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = -((\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})) = \\ &= -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{d}). \end{aligned}$$



При этом используется свойство 1) из этой же теоремы. Свойства 6), 7) и 8) также легко выводятся из свойств 2) и 3) при помощи свойства 1). Действительно, мы имеем

$$(\mathbf{c}, \alpha \mathbf{a}, \mathbf{d}) = -(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = -\alpha (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \alpha (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}),$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) &= -(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) = -((\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c})) = \\ &= -(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) + (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \alpha \mathbf{a}) = -(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) = -\alpha (\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) = \alpha (\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}).$$

Проделанные вычисления доказывают теорему 47.2.

### § 48. Понятие ориентированного объёма.

Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  — правая тройка некопланарных векторов в пространстве  $\mathbb{E}$ . Рассмотрим их смешанное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . В силу пункта 4) из теоремы 47.1 некопланарность векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  означает  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$ , а из этого в силу (45.1) следует  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq \mathbf{0}$ .

В силу пункта 4) из теоремы 39.1 условие  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq \mathbf{0}$  означает  $\mathbf{b} \nparallel \mathbf{c}$ . Отложим геометрические реализации неколлинеарных векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  от некоторой точки  $O$  и обозначим их  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  и  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ . Затем отложим от точки  $O$  геометрическую реализацию вектора  $\mathbf{a}$  и обозначим её  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ .

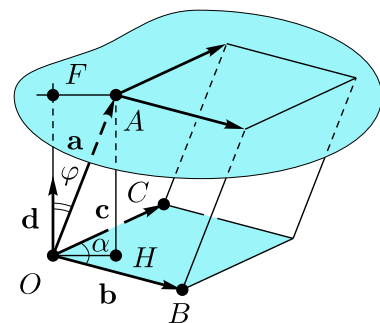


Рис. 48.1

Дополним вектора  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$  до косоугольного параллелепипеда как показано на рисунке 48.1.

Пусть  $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ . Вектор  $\mathbf{d}$  перпендикулярен плоскости основания параллелепипеда, а его длина вычисляется по формуле  $|\mathbf{d}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha$ . Легко видеть, что длина вектора

$\mathbf{d}$  совпадает с площадью основания параллелепипеда, т. е. с площадью параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$S = |\mathbf{d}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \alpha. \quad (48.1)$$

**ТЕОРЕМА 48.1.** *Длина векторного произведения двух векторов совпадает с площадью параллелограмма, построенного на этих векторах.*

Этот факт, сформулированный в теореме 48.1, известен как *геометрическая интерпретация векторного произведения*.

Вернёмся к рисунку 48.1. Воспользовавшись формулой (45.1), для смешанного произведения  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{d}| \cos \varphi. \quad (48.2)$$

Заметим, что  $|\mathbf{a}| \cos \varphi$  — это длина отрезка  $[OF]$ , которая совпадает с длиной отрезка  $[AH]$ . Отрезок  $[AH]$  параллелен отрезку  $[OF]$  и вектору  $\mathbf{d}$ , который перпендикулярен плоскости основания косоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке 48.1. Поэтому отрезок  $[AH]$  — это высота параллелепипеда и мы имеем формулу

$$h = |AH| = |\mathbf{a}| \cos \varphi. \quad (48.3)$$

Теперь из (48.1), (48.3) и (48.2) выводим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S h = V, \quad (48.4)$$

то есть смешанное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  в нашем случае совпадает с объёмом косоугольного параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

В общем случае величина смешанного произведения трёх некопланарных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  может быть как положительной, так и отрицательной. А объём параллелепипеда — величина всегда положительная. По этой причине в общем

случае формулу (48.4) следует записывать так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V, & \text{если тройка векторов} \\ & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ правая;} \\ -V, & \text{если тройка векторов} \\ & \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ левая.} \end{cases} \quad (48.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48.1.** Ориентированным объёмом упорядоченной тройки некопланарных векторов называется величина, равная объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, в случае правой тройки векторов и, равная объёму этого параллелепипеда со знаком минус, в случае левой тройки векторов.

Формулу (48.5) можно записать в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 48.2.** Смешанное произведение всякой тройки некопланарных векторов совпадает с ориентированным объёмом этой тройки векторов.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48.2.** Если  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — базис в пространстве  $\mathbb{E}$ , то ориентированный объём тройки векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  называется ориентированным объёмом базиса.

### § 49. Структурные константы смешанного произведения.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Рассмотрим всевозможные смешанные произведения, составленные из базисных векторов этого базиса:

$$c_{ijk} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k). \quad (49.1)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49.1.** Для всякого базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  величины  $c_{ijk}$ , заданные соотношениями (49.1), называются *структурными константами смешанного произведения* в этом базисе.

Формула (49.1) похожа на формулу (29.6) для компонент матрицы Грама. Однако, структурные константы смешанного произведения  $c_{ijk}$  в формула (49.1) составляют трёхиндексный массив, который нельзя уложить в матрицу.

Важным свойством структурных констант  $c_{ijk}$  является их *полная кососимметричность* или *полная антисимметричность*. Оно выражается следующими равенствами

$$c_{ijk} = -c_{jik}, \quad c_{ijk} = -c_{ikj}, \quad c_{ijk} = -c_{kji}, \quad (49.2)$$

Соотношения (49.2) означают, что при перестановке любой пары индексов величина  $c_{ijk}$  меняет знак. Эти соотношения легко выводятся из (43.5) путём применения пункта 1) из теоремы 47.1 к правой части (49.1).

Немедленным следствием свойства полной антисимметричности структурных констант смешанного произведения  $c_{ijk}$  являются следующие соотношения:

$$c_{iik} = -c_{iik}, \quad c_{ijj} = -c_{ijj}, \quad c_{iji} = -c_{iji}, \quad (49.3)$$

Они получаются в результате подстановок  $j = i$ ,  $k = j$  и  $k = i$  в (49.2). Из соотношений (49.3) вытекает зануление

$$c_{ijk} = 0, \text{ если среди значений индексов есть совпадающие.} \quad (49.4)$$

Пусть теперь значения индексов не совпадают. В этом случае, применяя соотношения (49.2), выводим

$$c_{ijk} = c_{123}, \text{ если индексы } i, j, k \text{ принимают значения } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ или } (3, 1, 2); \quad (49.5)$$

$$c_{ijk} = -c_{123}, \text{ если индексы } i, j, k \text{ принимают значения } (1, 3, 2), (3, 2, 1), \text{ или } (2, 1, 3). \quad (49.6)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы сравнить соотношения (49.4), (49.5) и (49.6) с формулой (43.5), которая опреде-

ляет символ Леви-Чивита  $\varepsilon_{ijk}$ . Такое сравнение даёт

$$c_{ijk} = c_{123} \varepsilon_{ijk}. \quad (49.7)$$

Заметим, что  $c_{123} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Это вытекает из формулы (49.1). Поэтому формулу (49.7) можно записать так:

$$c_{ijk} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \varepsilon_{ijk}. \quad (49.8)$$

**ТЕОРЕМА 49.1.** *В произвольном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  структурные константы смешанного произведения выражаются формулой (49.8) через одну единственную константу — ориентированный объём этого базиса.*

### § 50. Вычисление смешанного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый косоугольный базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Напомню, что термин *косоугольный базис* в этой книге используется как синоним произвольного базиса (см. определение 29.1). Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — три свободных вектора, заданных своими координатами в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{vmatrix}. \quad (50.1)$$

Формулы (50.1) означают, что имеют место разложения

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{c} = \sum_{k=1}^3 c^k \mathbf{e}_k. \quad (50.2)$$

Подставим (50.2) в смешанное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left( \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^3 c^k \mathbf{e}_k \right). \quad (50.3)$$

Для преобразования формулы (50.3) применим свойства смешанного произведения 2), 5) и 7) из теорем 47.1 и 47.2. Эти свойства позволяют вынести знаки суммирования по  $i$ ,  $j$  и  $k$  за скобки смешанного произведения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (a^i \mathbf{e}_i, b^j \mathbf{e}_j, c^k \mathbf{e}_k). \quad (50.4)$$

Далее применим свойства 3), 6) и 8) из теорем 47.1 и 47.2. Они позволяют вынести числовые множители  $a^i$ ,  $b^j$  и  $c^k$  за скобки смешанного произведения в (50.4):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k). \quad (50.5)$$

Величины  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$  — это структурные константы смешанного произведения в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (см. (49.1)). Поэтому формулу (50.5) можно записать так:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k c_{ijk}. \quad (50.6)$$

Подставим (49.8) в (50.6). При этом учтём, что ориентированный объём базиса  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  не зависит от индексов суммирования  $i$ ,  $j$  и  $k$ . Поэтому его можно вынести как общий множитель за знаки суммирования:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k \varepsilon_{ijk}. \quad (50.7)$$

Заметим, что формула (50.7) отличается от формулы (46.9) лишь общим множителем  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  в правой части. А формула (46.9) приводится к виду (46.8) только за счёт свойств

символа Леви-Чивита  $\varepsilon_{ijk}$ . По этой причине формула (50.7) допускает приведение к следующему виду:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (50.8)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50.1.** Формулы (50.6), (50.7) и (50.8) называются формулами для вычисления смешанного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

### § 51. Связь структурных констант векторного и смешанного произведений.

Структурные константы смешанного произведения определяются формулой (49.1). Применим формулу (45.1) для преобразования (49.1). Это приводит к формуле

$$c_{ijk} = (\mathbf{e}_i, [\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]). \quad (51.1)$$

Теперь можно применить формулу (40.2). Запишем её так:

$$[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] = \sum_{q=1}^3 C_{jk}^q \mathbf{e}_q. \quad (51.2)$$

Подстановка (51.2) в (51.1) и учёт свойств линейности скалярного произведения 5) и 6) из теоремы 28.2 даёт

$$c_{ijk} = \sum_{q=1}^3 C_{jk}^q (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_q). \quad (51.3)$$

Применим формулы (29.6) в (30.1) и приведём (51.3) к виду

$$c_{ijk} = \sum_{q=1}^3 C_{jk}^q g_{qi}. \quad (51.4)$$

Несколько более симпатичной является следующая формула:

$$c_{ijk} = \sum_{q=1}^3 C_{ij}^q g_{qk}. \quad (51.5)$$

Для вывода формулы (51.5) к левой части формулы (51.4) применяется тождество  $c_{ijk} = c_{jki}$ , которое вытекает из соотношений (49.2). После этого делается циклическое переобозначение индексов  $i \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow i$ .

Формула (51.5) — это первая из формул, связывающих структурные константы векторного и смешанного произведений. Она важна в теоретическом плане, но мало полезна в практическом смысле. Действительно, она выражает структурные константы смешанного произведения через структурные константы векторного произведения. Но для структурных констант смешанного произведения уже есть достаточно эффективная формула (49.8). А для структурных констант векторного произведения пока нет никакой формулы, кроме исходного определения (40.2). По этой причине необходимо обратить формулы (51.5) и выразить  $C_{ij}^q$  через  $c_{ijk}$ . Для достижения этой цели нам потребуются некоторые дополнительные сведения о матрице Грама.

**ТЕОРЕМА 51.1.** *Матрица Грама  $G$  любого базиса невырождена, то есть её детерминант отличен от нуля:  $\det G \neq 0$ .*

**ТЕОРЕМА 51.2.** *Для всякого базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  детерминант матрицы Грама  $G$  равен квадрату ориентированного объёма этого базиса:*

$$\det G = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2. \quad (51.6)$$

Теорема 51.1 вытекает из теоремы 51.2. Действительно, базис — это тройка некопланарных векторов. Из некопланарности векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в силу пункта 4) теоремы 47.1



имеем  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0$ . После этого формула (51.6) даёт

$$\det G > 0, \quad (51.7)$$

а теорема 51.1 является следствием неравенства (51.7).

Я не стану доказывать теорему 51.2 прямо здесь. Она будет доказана ниже в § 56.

Перейдём к извлечению следствий из теоремы 51.1. Известно, что всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу (см. [7]). Обозначим через  $G^{-1}$  матрицу, обратную к матрице Грама  $G$ . При записи компонент матрицы  $G^{-1}$  действует следующее соглашение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51.1.** Для обозначения компонент матрицы  $G^{-1}$ , обратной к матрице Грама  $G$ , используется тот же символ, что и для обозначения компонент самой матрицы Грама  $G$ , но при этом компоненты *обратной матрицы Грама* нумеруются двумя верхними индексами:

$$G^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{array} \right\| \quad (51.8)$$

Матрицы  $G$  и  $G^{-1}$  являются обратными друг для друга. Их произведение в любом порядке даёт единичную матрицу:

$$G \cdot G^{-1} = 1, \quad G^{-1} \cdot G = 1. \quad (51.9)$$

Из курса алгебры известно, что любое из равенств (51.9) однозначно определяет матрицу  $G^{-1}$  по заданной матрице  $G$  (см. [7]). Применим операцию транспонирования к обеим частям первого из матричных равенств (51.9):

$$(G \cdot G^{-1})^\top = 1^\top = 1. \quad (51.10)$$

Затем воспользуемся тождеством  $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$  из упражнения 29.2 для преобразования формулы (51.10) и учтём симметричность матрицы  $G$  (см. теорему 30.1):

$$(G^{-1})^\top \cdot G^\top = (G^{-1})^\top \cdot G = 1. \quad (51.11)$$

Остаётся сравнить полученное равенство (51.11) со вторым из матричных равенств (51.9). Это даёт:

$$(G^{-1})^\top = G^{-1} \quad (51.12)$$

Полученный результат (51.12) запишем в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 51.3.** *Для любого базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$ , матрица  $G^{-1}$ , обратная к матрице Грама  $G$  этого базиса, симметрична.*

В терминах компонент матрицы (51.7) равенство (51.12) записывается в виде равенства, аналогичного равенству (30.1):

$$g^{ij} = g^{ji}. \quad (51.13)$$

Второе из равенств (51.9) записывается в виде следующих соотношений для компонент матриц (51.8) и (29.7):

$$\sum_{k=1}^3 g^{sk} g_{kq} = \delta_q^s. \quad (51.14)$$

Здесь  $\delta_q^s$  — символ Кронекера, определяемый формулой (23.3). Пользуясь соотношениями симметричности (51.13) и (30.1), перепишем соотношения (51.14) в виде

$$\sum_{k=1}^3 g_{qk} g^{ks} = \delta_q^s. \quad (51.15)$$

Теперь домножим обе части равенства (51.5) на  $g^{ks}$  и выпол-

ним в обеих частях этого равенства суммирование по  $k$ :

$$\sum_{k=1}^3 c_{ijk} g^{ks} = \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 C_{ij}^q g_{qk} g^{ks}. \quad (51.16)$$

Если учесть (51.15), то (51.16) можно привести к виду

$$\sum_{k=1}^3 c_{ijk} g^{ks} = \sum_{q=1}^3 C_{ij}^q \delta_q^s. \quad (51.17)$$

В сумме по  $q$  в правой части равенства (51.17) индекс  $q$  пробегает три значения 1, 2, 3. При этом символ Кронекера  $\delta_q^s$  принимает значения 0 и 1, причём значение 1 он принимает ровно один раз при  $q = s$ . Это означает, что из трёх слагаемых в правой части (51.17) остаётся одно, которое равно  $C_{ij}^s$ . Сама формула (51.17) может быть записана в виде

$$\sum_{k=1}^3 c_{ijk} g^{ks} = C_{ij}^s. \quad (51.18)$$

Заменяем букву  $k$  на  $q$  и букву  $s$  на  $k$  в формуле (51.18), а также переставим левую и правую части в ней:

$$C_{ij}^k = \sum_{q=1}^3 c_{ijq} g^{qk}. \quad (51.19)$$

Формула (51.19) — это вторая формула, связывающая структурные константы векторного и смешанного произведений. На основе соотношений (51.5) и (51.19) формулируется следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 51.4.** Для всякого базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  структурные константы векторного и смешанного произведений в этом базисе взаимно-однозначным образом связаны друг с другом посредством формул (51.5) и (51.19).

### § 52. Эффективизация формул для вычисления векторного и смешанного произведений.

Рассмотрим формулу (29.8) для вычисления скалярного произведения в косоугольном базисе. Помимо координат векторов, она содержит компоненты матрицы Грама (29.7). Для нахождения компонент этой матрицы необходимо вычислить скалярные произведения базисных векторов (см. формулу (29.6)), а для этого надо измерить их длины и углы между ними (см. определение 26.1). Никаких дополнительных геометрических построений производить не требуется. Поэтому формула (29.8) признаётся эффективной.

Теперь рассмотрим формулу (41.5) для вычисления векторного произведения в косоугольном базисе. В неё входят структурные константы векторного произведения, которые определяются формулой (40.2). Для вычисления структурных констант по этой формуле требуется вычислить векторные произведения  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$  в её левой части. А для этого надо проводить перпендикуляры к плоскостям, заданным парами базисных векторов  $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ . (см. определение 35.1). После нахождения векторных произведений  $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$  их следует разложить по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , что также требует дополнительных геометрических построений (см. формулу (18.4) и рисунок 18.1). Поэтому эффективность формулы (41.5) значительно ниже, чем у формулы (29.8).

Далее рассмотрим формулу (50.7) для вычисления смешанного произведения в косоугольном базисе. Для её использования необходимо знать величину смешанного произведения трёх базисных векторов  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Она называется ориентированным объёмом базиса (см. определение 48.2). В силу теоремы 48.2 и определения 48.1 для этого надо найти объём косоугольного параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Вычисление объёма параллелепипеда требует знания площади основания и высоты параллелепипеда. Площадь основания эффективно вычисляется по длинам двух базисных

векторов и по углу между ними (см. формулу (48.1)). А вот для нахождения высоты требуется проведение перпендикуляра из одной из вершин параллелепипеда к плоскости его основания. Необходимость такого построения делает формулу (50.7) менее эффективной по сравнению с формулой (29.8) в случае скалярного произведения.

Для эффективизации формул (41.5) и (50.7) воспользуемся формулой (51.6). Она приводит к следующему соотношению:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \pm \sqrt{\det G}. \quad (52.1)$$

Знак в формуле (52.1) определяется ориентацией базиса:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{cases} \sqrt{\det G}, & \text{если базис } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \\ & \text{правый;} \\ -\sqrt{\det G}, & \text{если базис } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \\ & \text{левый.} \end{cases} \quad (52.2)$$

Подставим выражение (52.1) в формулу для смешанного произведения (50.7). В результате этого получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pm \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k \varepsilon_{ijk}. \quad (52.3)$$

Аналогичная подстановка в формулу (50.8) даёт:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pm \sqrt{\det G} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \quad (52.4)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52.1.** Формула (52.3) и формула (52.4) называются эффективизированными формулами для вычисления смешанного произведения по координатам векторов в координатном базисе.

Для эффективизации формулы (41.5) потребуются формулы (49.8) и (51.19). Подстановка (52.1) в эти формулы даёт

$$c_{ijk} = \pm \sqrt{\det G} \varepsilon_{ijk}, \quad (52.5)$$

$$C_{ij}^k = \pm \sqrt{\det G} \sum_{q=1}^3 \varepsilon_{ijq} g^{qk}. \quad (52.6)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52.2.** Формулы (52.5) и (52.6) называются эффективизированными формулами для структурных констант смешанного и векторного произведений.

Теперь подставим формулу (52.6) в (41.5). Это приводит к следующей формуле для векторного произведения:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \pm \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{q=1}^3 a^i b^j \varepsilon_{ijq} g^{qk} \mathbf{e}_k. \quad (52.7)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52.3.** Формула (52.7) называется эффективизированной формулой для вычисления векторного произведения по координатам векторов в косоугольном базисе.

### § 53. Ориентация пространства.

Рассмотрим эффективизированные формулы (52.1) (52.3), (52.4), (52.5), (52.6) и (52.7) из §52. Почти вся информация о базисе в них извлекается из матрицы Грама  $G$ . Матрица Грама, возникающая после выбора базиса, отражает важное свойство пространства  $\mathbb{E}$  — его метрику.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53.1.** *Метрикой* пространства  $\mathbb{E}$  называется возможность измерения длин отрезков и углов в нём.

Единственной остающейся неэффективностью в формулах (52.1), (52.3), (52.4), (52.5), (52.6) и (52.7) является выбор знака в них. Он определяется ориентацией базиса (см. формулу

(52.2)). И нет никакой возможности определить ориентацию базиса только по информации, содержащейся в его матрице Грама. Дело в том, что математическое пространство  $\mathbb{E}$ , описываемое аксиомами Евклида (см. [6]), содержит в себе возможность отличить пару базисов с различными ориентациями от пары базисов с совпадающими ориентациями. Однако, оно не содержит в себе причин для того, чтобы предпочесть одну из двух возможных ориентаций базисов.

Понятие правой тройки векторов (см. определение 34.2) и возможность выделять правые тройки векторов по сравнению с левыми связаны с наличием людей, с возможностью наблюдать векторы и сравнивать повороты векторов с вращением часовой стрелки. Имеется ли *фундаментальная асимметрия между правым и левым*, не зависящая от наличия людей и от других не очень фундаментальных обстоятельств? Является ли пространство *фундаментальным образом ориентированным*? Этот вопрос относится к природе физического пространства  $\mathbb{E}$ . Некоторые исследования в области физики элементарных частиц говорят, что такая асимметрия существует. Однако я, как автор этой книги, не могу с определённой уверенностью утверждать, что этот вопрос решён окончательно.

### § 54. Формулы свёртки.

Формулы свёртки — это совокупность из четырёх чисто алгебраических тождеств, связывающих символ Леви-Чивита и символ Кронекера друг с другом.

**ТЕОРЕМА 54.1.** *Символ Леви-Чивита и символ Кронекера связаны первой формулой свёртки, которая имеет вид:*

$$\varepsilon^{mnp} \varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n & \delta_k^n \\ \delta_i^p & \delta_j^p & \delta_k^p \end{vmatrix}. \quad (54.1)$$

Док-во. Обозначим через  $f_{ijk}^{mnp}$  правую часть первой фор-

мулы свёртки (54.1). Перестановка любой пары нижних индексов в  $f_{ijk}^{mnp}$  равносильна перестановке соответствующей пары столбцов в матрице (54.1). Известно, что перестановка двух столбцов в матрице ведёт к смене знака её определителя. Это даёт следующие соотношения для  $f_{ijk}^{mnp}$ :

$$f_{ijk}^{mnp} = -f_{jik}^{mnp}, \quad f_{ijk}^{mnp} = -f_{ikj}^{mnp}, \quad f_{ijk}^{mnp} = -f_{kji}^{mnp}. \quad (54.2)$$

Соотношения (54.2) аналогичны соотношениям (49.2). Повторяя рассуждения, использованные в § 49 при выводе формул (49.4), (49.5) и (49.6), из (54.2) выводим

$$f_{ijk}^{mnp} = \begin{cases} 0, & \text{если среди значений индексов } i, j, k \text{ есть совпадающие;} \\ f_{123}^{mnp}, & \text{если значения индексов } i, j, k \\ & \text{образуют чётную перестановку чисел } 1, 2, 3; \\ -f_{123}^{mnp}, & \text{если значения индексов } i, j, k \\ & \text{образуют нечётную перестановку чисел } 1, 2, 3. \end{cases} \quad (54.3)$$

Сравним формулу (54.3) с формулой (43.5), которая определяет символ Леви-Чивита. Такое сравнение даёт

$$f_{ijk}^{mnp} = f_{123}^{mnp} \varepsilon_{ijk}. \quad (54.4)$$

Подобно исходной величине  $f_{ijk}^{mnp}$ , множитель  $f_{123}^{mnp}$  в (54.4) определяется как детерминант матрицы:

$$f_{123}^{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_1^m & \delta_2^m & \delta_3^m \\ \delta_1^n & \delta_2^n & \delta_3^n \\ \delta_1^p & \delta_2^p & \delta_3^p \end{vmatrix}. \quad (54.5)$$

Перестановка любой пары верхних индексов в  $f_{123}^{mnp}$  равносильна перестановке соответствующих строк в матрице (54.5),



а перестановка любой пары строк в матрице меняет знак её определителя. Отсюда вытекают соотношения

$$f_{123}^{mnp} = -f_{123}^{nmp}, \quad f_{123}^{mnp} = -f_{123}^{mpn}, \quad f_{123}^{mnp} = -f_{123}^{pnm}, \quad (54.6)$$

аналогичные (54.2). Из соотношений (54.6) вытекает формула

$$f_{123}^{mnp} = \begin{cases} 0, & \text{если среди значений индексов} \\ & m, n, p \text{ есть совпадающие;} \\ f_{123}^{123}, & \text{если значения индексов } m, n, p \\ & \text{образуют чётную перестановку} \\ & \text{чисел } 1, 2, 3; \\ -f_{123}^{123}, & \text{если значения индексов } m, n, p \\ & \text{образуют нечётную перестановку} \\ & \text{чисел } 1, 2, 3. \end{cases} \quad (54.7)$$

Сравним формулу (54.7) с формулой (43.5), которая определяет символ Леви-Чивита. Такое сравнение даёт

$$f_{123}^{mnp} = f_{123}^{123} \varepsilon^{mnp}. \quad (54.8)$$

Соединим формулы (54.4) и (54.8), то есть подставим (54.8) в (54.4). Такая подстановка приводит к формуле

$$f_{ijk}^{mnp} = f_{123}^{123} \varepsilon^{mnp} \varepsilon_{ijk}. \quad (54.9)$$

Теперь надо вычислить коэффициент  $f_{123}^{123}$  в формуле (54.9). Напомню, что величина  $f_{ijk}^{mnp}$  была определена как правая часть формулы (54.1). Поэтому можно записать

$$f_{ijk}^{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n & \delta_k^n \\ \delta_i^p & \delta_j^p & \delta_k^p \end{vmatrix}. \quad (54.10)$$

Подставим  $i = 1, j = 2, k = 3, m = 1, n = 2$  и  $p = 3$  в формулу

(54.10). Такая подстановка даёт искомый коэффициент

$$f_{123}^{123} = \begin{vmatrix} \delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 \\ \delta_1^3 & \delta_2^3 & \delta_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (54.11)$$

С учётом полученного значения коэффициента (54.11) формула (54.9) приобретает следующий вид:

$$f_{ijk}^{mnp} = \varepsilon^{mnp} \varepsilon_{ijk}. \quad (54.12)$$

Теперь требуемая формула свёртки (54.1) получается как следствие из (54.10) и (54.12). Теорема 54.1 доказана.  $\square$

**ТЕОРЕМА 54.2.** *Символ Леви-Чивита и символ Кронекера связаны второй формулой свёртки, которая имеет вид:*

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix}. \quad (54.13)$$

Док-во. Вторая формула свёртки (54.13) выводится из первой формулы свёртки (54.1). Для этого подставим  $p = k$  в формулу (54.1) и учтём, что  $\delta_k^k = 1$ . Это даёт:

$$\varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n & \delta_k^n \\ \delta_i^k & \delta_j^k & 1 \end{vmatrix}. \quad (54.14)$$

Добавим знаки суммирования по  $k$  в обе части (54.14):

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} = \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n & \delta_k^n \\ \delta_i^k & \delta_j^k & 1 \end{vmatrix}. \quad (54.15)$$

Левая часть полученной формулы (54.15) совпадает с левой частью второй формулы свёртки (54.13). Поэтому будем преобразовывать только правую часть этой формулы. Разложим определитель из (54.15) по последней строке:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} &= \sum_{k=1}^3 \left( \delta_i^k \begin{vmatrix} \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_j^n & \delta_k^n \end{vmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \delta_j^k \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_k^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \quad (54.16)$$

Действие знака суммирования по  $k$  распространяется на все слагаемые в круглых скобках в правой части (54.16). После раскрытия этих скобок мы получим три знака суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} &= \sum_{k=1}^3 \delta_i^k \begin{vmatrix} \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_j^n & \delta_k^n \end{vmatrix} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 \delta_j^k \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_k^n \end{vmatrix} + \sum_{k=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (54.17)$$

Первая сумма в правой части (54.17) содержит множитель  $\delta_i^k$ . В цикле суммирования по  $k$  этот множитель оказывается отличным от нуля только один раз при совпадении индексов  $k = i$ . Поэтому из первой суммы фактически остаётся только одно слагаемое, в котором следует положить  $k = i$ . Из второй суммы в правой части (54.17) также остаётся одно слагаемое, в котором  $k = j$ . Выражение в последней сумме вообще не зависит от  $k$ . Поэтому в цикле суммирования оно утраивается. С учётом  $\delta_i^i = \delta_j^j = 1$  сказанное даёт

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_j^m & \delta_i^m \\ \delta_j^n & \delta_i^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix}.$$

Первый определитель в правой части полученного выше соотношения отличается от двух других перестановкой столбцов. Если выполнить такую перестановку ещё раз, он меняет знак и все определители станут одинаковыми. После этого можно привести подобные слагаемые:

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} = (-1 - 1 + 3) \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix}. \quad (54.18)$$

Теперь легко видеть, что формула (54.18) сводится к требуемой формуле (54.13). Теорема 54.2 доказана.  $\square$

**ТЕОРЕМА 54.3.** *Символ Леви-Чивита и символ Кронекера связаны третьей формулой свёртки, которая имеет вид:*

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mjk} \varepsilon_{ijk} = 2 \delta_i^m. \quad (54.19)$$

Док-во. Третья формула свёртки (54.19) выводится из второй формулы свёртки (54.13). Для этого подставим  $n = j$  в формулу (54.13), учтём, что  $\delta_j^j = 1$ , и добавим суммирование по  $j$  в обе части полученного равенства. Это даёт:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mjk} \varepsilon_{ijk} = \sum_{j=1}^3 \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^j & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^3 (\delta_i^m - \delta_j^m \delta_i^j).$$

После раскрытия скобок сумму по  $j$  в правой части полученной формулы можно вычислить явно:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mjk} \varepsilon_{ijk} = \sum_{j=1}^3 \delta_i^m - \sum_{j=1}^3 \delta_j^m \delta_i^j = 3 \delta_i^m - \delta_i^m = 2 \delta_i^m.$$

Легко видеть, что проделанные вычисления доказывают формулу (54.19) и теорему 54.3 в целом.  $\square$

ТЕОРЕМА 54.4. Символ Леви-Чивита удовлетворяет четвёртой формуле свёртки, которая имеет следующий вид:

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6. \quad (54.20)$$

ДОК-ВО. Четвёртая формула свёртки (54.20) выводится из третьей формулы свёртки (54.19). Для этого в (54.19) делается подстановка  $m = i$  и добавляется суммирование по  $i$  в обе части полученного равенства. Это даёт

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} = 2 \sum_{i=1}^3 \delta_i^i = 2 \sum_{i=1}^3 1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Проделанные вычисления доказывают формулу (54.20), что завершает доказательство теоремы 54.4.  $\square$

### § 55. Формула двойного векторного произведения и тождество Якоби.

ТЕОРЕМА 55.1. Для любых трёх свободных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  в пространстве  $\mathbb{E}$  имеет место тождество

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (55.1)$$

известное как формула двойного векторного произведения.

ДОК-ВО. Для доказательства тождества (55.1) выберем некоторый правый ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$  и разложим вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  в этом базисе:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 b^j \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{c} = \sum_{k=1}^3 c^k \mathbf{e}_k. \quad (55.2)$$

Обозначим  $\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$  и для вычисления вектора  $\mathbf{d}$  воспользуемся формулой (44.1), которую запишем в виде

$$\mathbf{d} = \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b^i c^j \varepsilon_{ijk} \right) \mathbf{e}_k. \quad (55.3)$$

Формула (55.3) представляет собой разложение вектора  $\mathbf{d}$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , что позволяет найти его координаты

$$d^k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 b^i c^j \varepsilon_{ijk}. \quad (55.4)$$

Далее вновь применим формулу (44.1) для вычисления вектора  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = [\mathbf{a}, \mathbf{d}]$ . Запишем её так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{d}] = \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^m d^k \varepsilon_{mkn} \mathbf{e}_n. \quad (55.5)$$

Подстановка (55.4) в формулу (55.5) даёт

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{d}] &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mkn} \mathbf{e}_n = \\ &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j \left( \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mkn} \right) \mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (55.6)$$

Верхнее либо нижнее расположение индексов в символе Леви-Чивита значения не имеет (см. (43.5)). Поэтому учёт соотношений (43.8) позволяет записать  $\varepsilon_{mkn} = \varepsilon^{mkn} = -\varepsilon^{mnk}$  и привести формулу (55.6) к следующему виду:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{d}] = - \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j \left( \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{mnk} \varepsilon_{ijk} \right) \mathbf{e}_n. \quad (55.7)$$

Сумма, заключённая в круглые скобки в (55.7), совпадает с левой частью второй формулы свёртки (54.13). Применив формулу (54.13), продолжим преобразование формулы (55.7):

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a}, \mathbf{d}] &= - \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n \end{vmatrix} \mathbf{e}_n = \\
 &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j (\delta_i^n \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^n) \mathbf{e}_n = \\
 &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j \delta_i^n \delta_j^m \mathbf{e}_n - \\
 &\quad - \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^m b^i c^j \delta_i^m \delta_j^n \mathbf{e}_n = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^j b^i c^j \mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i b^i c^j \mathbf{e}_j.
 \end{aligned}$$

Полученный результат можно записать в следующем виде:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \left( \sum_{j=1}^3 a^j c^j \right) \left( \sum_{i=1}^3 b^i \mathbf{e}_i \right) - \left( \sum_{i=1}^3 a^i b^i \right) \left( \sum_{j=1}^3 c^j \mathbf{e}_j \right).$$

Теперь заметим, что скалярное произведение в ортонормированном базисе вычисляется по формуле (33.3). Формула (33.3) легко узнаётся в составе выписанного выше соотношения. Её учёт приводит к следующему равенству:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \sum_{i=1}^3 b^i \mathbf{e}_i - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sum_{j=1}^3 c^j \mathbf{e}_j. \quad (55.8)$$

Для окончательного преобразования (55.8) к виду (55.1) достаточно увидеть в составе (55.8) разложения векторов  $\mathbf{b}$  и

$\mathbf{c}$  вида (55.2). В результате этого формула (55.8) приобретёт вид  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{c}$ , что по существу совпадает с (55.1). Теорема 55.1 доказана.  $\square$

**ТЕОРЕМА 55.2.** *Для любых трёх свободных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  в пространстве  $\mathbb{E}$  имеет место тождество Якоби*

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{0}. \quad (55.9)$$

Док-во. Тождество Якоби (55.9) легко выводится при помощи формулы двойного векторного произведения (55.1). Действительно, запишем формулу (55.1):

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (55.10)$$

Затем дважды выполним в ней циклические переобозначения векторов  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{a}$ . Это даёт

$$[\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (55.11)$$

$$[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{a}(\mathbf{c}, \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}). \quad (55.12)$$

При сложении трёх равенств (55.10), (55.11) и (55.12) в левой части получаем требуемое  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$ , а правая часть при этом зануляется. Теорема 55.2 доказана.  $\square$

### § 56. Формула для умножения двух смешанных произведений.

**ТЕОРЕМА 56.1.** *Для любых шести свободных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  в пространстве  $\mathbb{E}$  имеет место тождество*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{z}) & (\mathbf{b}, \mathbf{z}) & (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \end{vmatrix}. \quad (56.1)$$



Тождество (56.1) известно как *формула для умножения двух смешанных произведений*. Для доказательства этого тождества нам потребуются два свойства определителей матриц известные как *линейность по строке* и *линейность по столбцу* (см. [7]). Первое из них можно изобразить формулой

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^k(i) & \dots & x_n^k(i) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i x_1^k(i) & \dots & \sum_{i=1}^r \alpha_i x_n^k(i) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

**ЛЕММА 56.1.** *Если  $k$ -ая строка матрицы является линейной комбинацией  $r$  строк (не обязательно совпадающих с другими строками этой матрицы), то определитель такой матрицы равен линейной комбинации  $r$  отдельных определителей.*

Линейность по столбцу формулируется схожим образом.

**ЛЕММА 56.2.** *Если  $k$ -ый столбец матрицы является линейной комбинацией  $r$  столбцов (не обязательно совпадающих с другими столбцами матрицы), то определитель такой матрицы равен линейной комбинации  $r$  отдельных определителей.*

Я не стану выписывать формулу, которая иллюстрирует лемму 56.2, по причине малости размеров страницы. Она получается из изображённой выше формулы простым транспонированием матриц в обеих частях формулы.

**ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 56.1.** Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый правый ортонормированный базис в пространстве  $\mathbb{E}$ . Будем считать, что все вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$  заданы своими координатами в этом базисе. Для удобства записи обозначим через  $L$  левую часть формулы (56.1):

$$L = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (56.2)$$

Для вычисления  $L$  применим формулу (46.9). В случае векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  для их смешанного произведения она даёт

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a^i b^j c^k \varepsilon_{ijk}. \quad (56.3)$$

В случае векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  формулу (46.9) запишем так:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 x^m y^n z^p \varepsilon^{mnp}. \quad (56.4)$$

Замена нижних индексов на верхние в символе Леви-Чивита его значений не меняет (см. (43.5)). Теперь, перемножив формулы (56.3) и (56.4), получим формулу для  $L$ :

$$L = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 a^i b^j c^k x^m y^n z^p \varepsilon^{mnp} \varepsilon_{ijk}. \quad (56.5)$$

Произведение  $\varepsilon^{mnp} \varepsilon_{ijk}$  в (56.5) можно заменить определителем матрицы в силу первой формулы свёртки (54.1):

$$L = \sum_{m=1}^3 \dots \sum_{n=1}^3 \sum_{p=1}^3 a^i b^j c^k x^m y^n z^p \begin{vmatrix} \delta_i^m & \delta_j^m & \delta_k^m \\ \delta_i^n & \delta_j^n & \delta_k^n \\ \delta_i^p & \delta_j^p & \delta_k^p \end{vmatrix}. \quad (56.6)$$

Следующий шаг состоит в применении лемм 56.1 и 56.2 для преобразования формулы (56.6). Пользуясь леммой 56.2, внесём сумму по  $i$  и множитель  $a^i$  в первый столбец определителя, затем внесём сумму по  $j$  и множитель  $b^j$  во второй столбец определителя и, наконец, внесём сумму по  $k$  и множитель  $c^k$  в третий столбец определителя. После этого применим лемму 56.1 для того, чтобы распределить суммы по  $m$ ,  $n$  и  $p$  по строкам определителя. Одновременно с ними по строкам

распределятся и множители  $x^m$ ,  $y^n$  и  $z^p$ . Результатом наших усилий будет следующая формула:

$$L = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 \sum_{m=1}^3 a^i x^m \delta_i^m & \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 b^j x^m \delta_j^m & \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 c^k x^m \delta_k^m \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^3 a^i y^n \delta_i^n & \sum_{j=1}^3 \sum_{n=1}^3 b^j y^n \delta_j^n & \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^3 c^k y^n \delta_k^n \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{p=1}^3 a^i z^p \delta_i^p & \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^3 b^j z^p \delta_j^p & \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 c^k z^p \delta_k^p \end{vmatrix}.$$

В силу наличия символов Кронекера в суммах двойные суммы сведутся к одинарным и формула запишется так:

$$L = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^3 a^i x^i & \sum_{j=1}^3 b^j x^j & \sum_{k=1}^3 c^k x^k \\ \sum_{i=1}^3 a^i y^i & \sum_{j=1}^3 b^j y^j & \sum_{k=1}^3 c^k y^k \\ \sum_{i=1}^3 a^i z^i & \sum_{j=1}^3 b^j z^j & \sum_{k=1}^3 c^k z^k \end{vmatrix}. \quad (56.7)$$

Базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  мы выбрали ортонормированным. Скалярные произведения в нём вычисляются по формуле (33.3). Сравнив (33.3) с (56.7), видим, что все суммы в определителе (56.7) являются скалярными произведениями векторов:

$$L = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{z}) & (\mathbf{b}, \mathbf{z}) & (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \end{vmatrix}. \quad (56.8)$$

Теперь формула (56.1) вытекает из сравнения формул (56.2) и (56.8). Теорема 56.1 доказана.  $\square$

Формула (56.1) ценна для нас не сама по себе, а в силу её следствия. Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — некоторый произвольный базис. Подставим  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1, \mathbf{b} = \mathbf{e}_2, \mathbf{c} = \mathbf{e}_3, \mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \mathbf{y} = \mathbf{e}_2, \mathbf{z} = \mathbf{e}_3$  в формулу (56.1). В результате подстановки мы получим:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{vmatrix}. \quad (56.9)$$

Сравнив (56.9) с (29.7) и (29.6), видим что матрица в (56.9) отличается от матрицы Грама  $G$  транспонированием. Если учесть симметричность матрицы Грама (см. теорему 30.1), то окажется, что и этого различия нет. Поэтому формула (56.9) запишется следующим образом:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2 = \det G. \quad (56.10)$$

Формула (56.10) совпадает с формулой (51.6). Этот факт доказывает теорему 51.2, которая оставалась недоказанной.

## ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этой главе математический аппарат векторной алгебры из главы I применяется для описания как отдельных точек пространства  $\mathbb{E}$ , так и для описания геометрических фигур, которые из этих точек состоят.

### § 1. Декартовы системы координат.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** *Декартовой системой координат* в пространстве  $\mathbb{E}$  называется базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  из трёх свободных векторов пространства  $\mathbb{E}$ , дополненный некоторой фиксированной точкой  $O$  этого пространства. Точка  $O$ , входящая в состав декартовой системы координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , называется *началом координат* или *началом отсчёта*.

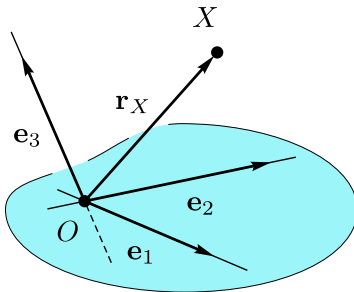


Рис. 1.1

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** *Радиус-вектором* точки  $X$  в декартовой системе координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  называется вектор  $\overrightarrow{OX}$ , соединяющий начало отсчёта  $O$  с точкой  $X$ .

Свободные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  входящие в состав декартовой системы координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  не перестают быть свободными. Однако их часто изображают исходящими из на-

чала координат  $O$ . При этом рисуют также и прямые, на которых лежат векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , и называют эти прямые *осями координат* (см. рисунок 1.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.** *Координатами* точки  $X$  в декартовой системе координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  называют координаты её радиус вектора  $\mathbf{r}_X = \overrightarrow{OX}$  в разложении по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Как и другие вектора, радиус-векторы точек попадают под действие соглашения о расстановке индексов (см. определение 20.1 в главе I). Их координаты нумеруются верхними индексами и записываются в столбик:

$$\mathbf{r}_X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Однако, в тех случаях, когда точка  $X$  представляется своими координатами, их располагают в строчку и размещают в скобках сразу после символа, обозначающего саму точку:

$$X(x^1, x^2, x^3). \quad (1.2)$$

Нумерация координат верхними индексами в записи (1.2) наследуется от (1.1).

Декартовы системы координат могут быть как *прямоугольными*, так и *косогольными*, в зависимости от того, какой базис в них использован. При этом я буду придерживаться соглашения, аналогичного определению 29.1 из главы I.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.** В данной книге *косогольная система координат* понимается как *произвольная система координат*, в которой нет никаких ограничений на используемый базис.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5.** Прямоугольная система координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , базис которой является ортонормированным, называется *прямоугольной системой координат с единичными масштабами по осям*.

**Примечание.** Радиус-вектор точки  $X$ , записанный в виде  $\overrightarrow{OX}$ , — это геометрический вектор с жёстко фиксированным расположением в пространстве. Радиус-вектор точки  $X$ , записанный в виде  $\mathbf{r}_X$ , — это уже свободный вектор. С ним можно выполнять различные операции векторной алгебры: складывать с другими векторами, умножать на числа, образовывать скалярные произведения и т. д. Но у вектора  $\mathbf{r}_X$  есть особая миссия — указывать на точку  $X$ . Эту миссию он выполняет только тогда, когда отложен от начала координат.

**УПРАЖНЕНИЕ 1.1.** Основываясь на определении 1.1, сформулируйте аналогичные определения для декартовых систем координат на плоскости и на прямой.

## § 2. Уравнения линий и поверхностей.

Координаты одной фиксированной точки  $X$  в пространстве  $\mathbb{E}$  — это три фиксированных числа (три константы). Если координаты переменные, то получается подвижная точка, которая пробегает определённое множество в пространстве  $\mathbb{E}$ . В этой книге мы будем рассматривать случаи, когда таким множеством является некоторая линия или некоторая поверхность. Случай линии отличается от случая поверхности *размерностью* или *количеством степеней свободы*. Всякая поверхность *двумерна* — точка на ней имеет две степени свободы. Всякая линия *одномерна* — точка на линии имеет одну степень свободы.

Линии и поверхности содержат бесконечное число точек. Поэтому их нельзя описать перечислением, описывая каждую точку отдельно. Линии и поверхности описывают с помощью уравнений. Уравнения линий и поверхностей делятся на несколько типов. Если в уравнение входит радиус-вектор точки без разделения его на отдельные координаты, то такое уравнение называют *векторным уравнением*. Если радиус-вектор точки входит в уравнение через его координаты, такое уравнение называется *координатным*.

Ещё один отличительный признак уравнений — способ задания количества степеней свободы. Одна или две степени свободы точки могут задаваться явно, когда радиус вектор точки выражается в виде функции от одной или двух переменных, которые называются *параметрами*. В этом случае уравнение называется *параметрическим*. *Непараметрические* уравнения выступают в роли препятствий или ограничителей, сокращающих число степеней свободы с трёх до двух или с трёх до одной.

### § 3. Прямая на плоскости.

Пусть выбрана и зафиксирована некоторая плоскость  $\alpha$  в пространстве  $\mathbb{E}$ . Это сразу сокращает число степеней свободы точек с трёх до двух.

Для изучения различных видов уравнений, задающих прямую на плоскости  $\alpha$  выберем некоторую систему координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  на этой плоскости. После этого точки плоскости и точки прямой можно задавать их радиус-векторами.

**1. Векторно-параметрическое уравнение** прямой на плоскости. Рассмотрим прямую на плоскости с выбранной

системой координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Пусть  $X$  — произвольная точка на прямой (см. рисунок 3.1) и пусть  $A$  — некоторая фиксированная точка на этой прямой. Положение точки  $X$  относительно точки  $A$  отмечается вектором  $\overrightarrow{AX}$ , а положение точки  $A$  определяется её радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ . Поэтому

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OX} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{AX}. \quad (3.1)$$

Выберем и зафиксируем некоторый ненулевой вектор  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,

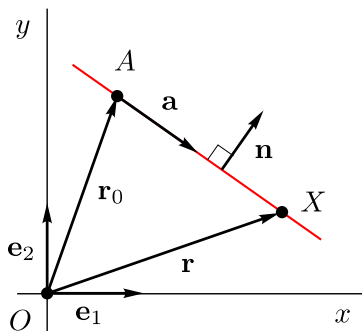


Рис. 3.1



направленный вдоль рассматриваемой прямой. Вектор  $\overrightarrow{AX}$  выражается через  $\mathbf{a}$  посредством следующей формулы:

$$\overrightarrow{AX} = \mathbf{a} \cdot t. \quad (3.2)$$

Из формул (3.1) и (3.2) немедленно получаем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} \cdot t. \quad (3.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.** Равенство (3.3) называется *векторно-параметрическим* уравнением прямой на плоскости. Фиксированный вектор  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  в нём называется *направляющим вектором*, а число  $t$  — *параметром*. Фиксированный вектор  $\mathbf{r}_0$  называется *радиус-вектором начальной точки*.

Каждому значению параметра  $t$  соответствует некоторая точка на прямой. Начальной точке  $A$  соответствует нулевое значение параметра  $t = 0$ .

**2. Координатно-параметрические уравнения** прямой на плоскости. Зададим векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{a}$  в векторно-параметрическом уравнении (3.3) их координатами:

$$\mathbf{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

В силу (3.4) уравнение (3.3) запишется в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t. \end{cases} \quad (3.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2.** Равенства (3.5) называются *координатно-параметрическими* уравнениями прямой на плоскости. Константы  $a_x$  и  $a_y$  в них не могут выбираться равными нулю одновременно.

**3. Нормальное векторное уравнение** прямой на плоскости. Пусть  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  — вектор, лежащий в рассматриваемой

плоскости и перпендикулярный рассматриваемой прямой (см. рисунок 3.1). Применим скалярное умножение на вектор  $\mathbf{n}$  к обеим частям уравнения (3.3). В результате этого получим

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + (\mathbf{a}, \mathbf{n}) t. \quad (3.6)$$

Но  $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ . Поэтому второе слагаемое в правой части (3.6) зануляется и уравнение фактически перестаёт содержать параметр  $t$ . Полученное уравнение принято записывать в виде

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0. \quad (3.7)$$

Скалярное произведение двух фиксированных векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{n}$  — это числовая константа. Если обозначить  $D = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ , то уравнение (3.7) можно записать в виде

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D. \quad (3.8)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.** Любое из двух равенств (3.7) и (3.8) называется *нормальным векторным* уравнением прямой на плоскости. Фиксированный вектор  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  в этих уравнениях называется *вектором нормали* этой прямой.

**4. Каноническое уравнение** прямой на плоскости. Рассмотрим случай, когда  $a_x \neq 0$  и  $a_y \neq 0$  в уравнениях (3.5). В этом случае параметр  $t$  можно выразить через  $x$  и  $y$ :

$$t = \frac{x - x_0}{a_x}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (3.9)$$

Из уравнений (3.9) можно вывести следующее равенство:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (3.10)$$

Если  $a_x = 0$ , то первое из уравнений (3.5) принимает вид

$$x = x_0. \quad (3.11)$$

Если  $a_y = 0$ , то второе уравнение (3.5) принимает вид

$$y = y_0. \quad (3.12)$$

Подобно уравнению (3.10), уравнения (3.11) и (3.12) не содержат параметра  $t$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.** Любое из трёх равенств (3.10), (3.11) и (3.12) называется *каноническим* уравнением прямой на плоскости. Константы  $a_x$  и  $a_y$  в уравнении (3.10) должны быть отличны от нуля.

**5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки** на плоскости. Пусть заданы две не совпадающие точки  $A \neq B$  на плоскости. Положим

$$A = A(x_0, y_0), \quad B = B(x_1, y_1). \quad (3.13)$$

Вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  можно выбрать в качестве направляющего вектора для прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$  в (3.13). Тогда из формулы (3.13) выводим

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

В силу (3.14) уравнение (3.10) можно записать как

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) записывается в случае, когда  $x_1 \neq x_0$  и  $y_1 \neq y_0$ . Если же  $x_1 = x_0$ , то записывается уравнение (3.11):

$$x = x_0 = x_1. \quad (3.16)$$

А в случае, когда  $y_1 = y_0$ , записывается уравнение (3.12):

$$y = y_0 = y_1. \quad (3.17)$$

Условия  $x_1 = x_0$  и  $y_1 = y_0$  не могут выполняться одновременно в силу несовпадения точек  $A \neq B$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5.** Любое из трёх равенств (3.15), (3.16) и (3.17) называется уравнением прямой, *проходящей через две заданные точки* (3.13) на плоскости.

**6. Общее уравнение** прямой на плоскости. Используем формулу (29.8) из главы I для вычисления скалярного произведения в (3.8). В данном случае она имеет вид

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 r^i n^j g_{ij}, \quad (3.18)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты матрицы Грама для базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  на плоскости (см. рисунок 3.1). На этом рисунке базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  изображён прямоугольным. Однако, в общем случае он может быть и косоугольным. Введём обозначения

$$n_i = \sum_{j=1}^2 n^j g_{ij}. \quad (3.19)$$

Величины  $n^1$  и  $n^2$  в (3.18) и (3.19) — это координаты вектора нормали  $\mathbf{n}$  (см. рисунок 3.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.** Величины  $n_1$  и  $n_2$ , которые получаются из координат вектора нормали  $\mathbf{n}$  по формуле (3.19), называются *ковариантными координатами* вектора  $\mathbf{n}$ .

С учётом обозначений (3.19) формула (3.18) записывается в следующем более простом виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^2 r^i n_i. \quad (3.20)$$

Учтём прежние обозначения (3.4) и добавим новые:

$$A = n_1, \quad B = n_2. \quad (3.21)$$

В силу (3.4), (3.20) и (3.21) уравнение (3.8) запишется так:

$$Ax + By - D = 0. \quad (3.22)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7.** Равенство (3.22) называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

**7. Уравнение прямой в отрезках.** Рассмотрим прямую на плоскости, которая не проходит через начало координат, но пересекается с каждой из двух осей координат. Перечисленные условия означают, что  $D \neq 0$ ,  $A \neq 0$  и  $B \neq 0$  в уравнении (3.22). Через  $X$  и  $Y$  на рисунке 3.2 обозначены точки пересечения прямой с осями координат:

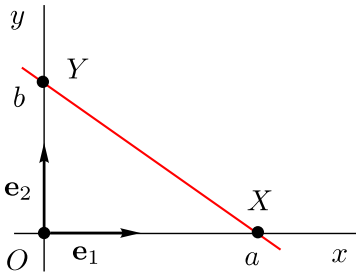


Рис. 3.2

$$\begin{aligned} X &= X(a, 0), \\ Y &= Y(0, b). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Величины  $a$  и  $b$  в (3.23) выражаются через параметры  $A$ ,  $B$  и  $D$  уравнения (3.22) посредством следующих формул:

$$a = D/A, \quad b = D/B. \quad (3.24)$$

А само уравнение (3.22) может быть записано так:

$$\frac{x}{D/A} + \frac{y}{D/B} = 1. \quad (3.25)$$

Если учесть (3.24), то равенство (3.25) примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.26)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8.** Равенство (3.26) называется *уравнением прямой на плоскости в отрезках*.

Название уравнения (3.26) обусловлено тем, что параметры  $a$  и  $b$  в нём определяют длины отрезков  $[OX]$  и  $[OY]$ , которые отсекаются прямой на осях координат.

### § 4. Плоскость в пространстве.

Пусть выбрана и зафиксирована некоторая плоскость  $\alpha$  в пространстве  $\mathbb{E}$ . Для изучения различных видов уравнений,

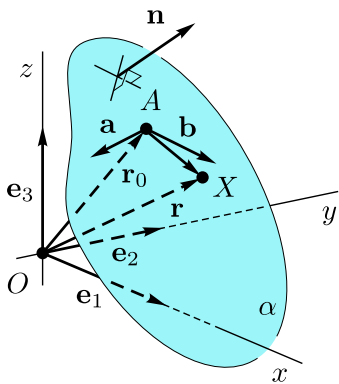


Рис. 4.1

задающих эту плоскость выберем некоторую систему координат  $O, e_1, e_2, e_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$ . После этого точки плоскости  $\alpha$  можно задавать их радиус-векторами.

**1. Векторно-параметрическое уравнение** плоскости в пространстве. Обозначим через  $A$  некоторую фиксированную точку плоскости  $\alpha$  (см. рисунок 4.1), а через  $X$  — произвольную точку этой плоскости. Положение точки  $X$  относительно точки  $A$  отмечается

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OX} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{AX}. \tag{4.1}$$

Выберем и зафиксируем некоторую пару неколлинеарных векторов  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ , лежащих на плоскости  $\alpha$ . Такие векторы образуют базис на этой плоскости (см. определение 17.1 из главы I). Вектор  $\overrightarrow{AX}$  раскладывается по базису из  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\overrightarrow{AX} = \mathbf{a} \cdot t + \mathbf{b} \cdot \tau. \tag{4.2}$$

В силу произвольности точки  $X$  на плоскости  $\alpha$  числа  $t$  и  $\tau$  в

(4.2) — это два произвольных параметра. После подстановки (4.2) в формулу (4.1) получаем следующее равенство:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} \cdot t + \mathbf{b} \cdot \tau. \quad (4.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.** Равенство (4.3) называется *векторно-параметрическим* уравнением плоскости в пространстве. Неколлинеарные вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в нём называются *направляющими векторами*, а числа  $t$  и  $\tau$  — *параметрами*. Фиксированный вектор  $\mathbf{r}_0$  называется *радиус-вектором начальной точки*.

**2. Координатно-параметрические уравнения** плоскости в пространстве. Зададим векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в векторно-параметрическом уравнении (4.3) их координатами:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

В силу (4.4) уравнение (4.3) запишется в виде трёх уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t + b_x \tau, \\ y = y_0 + a_y t + b_y \tau, \\ z = z_0 + a_z t + b_z \tau. \end{cases} \quad (4.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.** Соотношения (4.5) называются *координатно-параметрическими* уравнениями плоскости в пространстве. Тройки констант  $a_x, a_y, a_z$  и  $b_x, b_y, b_z$  в них не могут выбираться пропорциональными друг другу.

**3. Нормальное векторное уравнение** плоскости в пространстве. Пусть  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  — вектор, перпендикулярный к плоскости  $\alpha$  (см. рисунок 4.1). Применим скалярное умножение на вектор  $\mathbf{n}$  к обеим частям уравнения (4.3). Это даёт

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + (\mathbf{a}, \mathbf{n}) t + (\mathbf{b}, \mathbf{n}) \tau. \quad (4.6)$$

Но  $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} \perp \mathbf{n}$ . По этой причине второе и третье слагаемые в (4.6) зануляются и уравнение фактически перестаёт содержать параметры  $t$  и  $\tau$ . Полученное таким способом уравнение принято записывать в следующем виде:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0. \quad (4.7)$$

Скалярное произведение двух фиксированных векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{n}$  — это числовая константа. Если обозначить  $D = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ , то уравнение (4.7) можно записать как

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D. \quad (4.8)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.** Любое из двух равенств (4.7) и (4.8) называется *нормальным векторным уравнением* плоскости в пространстве. Фиксированный вектор  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  в этих уравнениях называется *вектором нормали* этой плоскости.

**4. Каноническое уравнение** плоскости в пространстве. В качестве вектора нормали  $\mathbf{n}$  в (4.7) можно выбрать векторное произведение двух неколлинеарных векторов  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ , лежащих на плоскости  $\alpha$ . Подстановка  $\mathbf{n} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  в уравнение (4.7) приводит к следующему соотношению:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0. \quad (4.9)$$

Пользуясь определением смешанного произведения (см. формулу (45.1) из главы I), скалярное произведение в (4.9) можно преобразовать в смешанное произведение:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \quad (4.10)$$

Преобразуем уравнение (4.10) в координатную форму. Для этого воспользуемся координатным представлением векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , взятым из (4.4). Применим формулу (50.8) из главы I и учтём тот факт, что ориентированный объём базиса



$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  отличен от нуля. Это даёт

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

Если исходить не из (4.7), а из уравнения (4.8), то вместо (4.10) получится следующее соотношение:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = D. \quad (4.12)$$

В координатной форме соотношение (4.12) запишется как

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = D. \quad (4.13)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.** Любое из двух равенств (4.11) и (4.13) называется *каноническим* уравнением плоскости в пространстве. Тройки констант  $a_x, a_y, a_z$  и  $b_x, b_y, b_z$  в этих уравнениях не должны быть пропорциональными друг другу.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.** Уравнения (4.10) и (4.12), в которых  $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ , называются *векторными формами канонического* уравнения плоскости в пространстве.

**5. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.** Пусть заданы три точки  $A, B$  и  $C$  пространства  $\mathbb{E}$ , не лежащие на одной прямой. Положим

$$\begin{aligned} A &= A(x_0, y_0, z_0), \\ B &= B(x_1, y_1, z_1), \\ C &= C(x_2, y_2, z_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$  можно выбрать в качестве направляющих векторов плоскости, проходящей через три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Тогда из формул (4.14) выводим

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

В силу (4.15) уравнение (4.11) можно записать как

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.16)$$

Если обозначить через  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  радиус-векторы точек  $B$  и  $C$  из (4.14), то соотношения (4.15) можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0. \quad (4.17)$$

После этого подстановка (4.17) в (4.10) даёт

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (4.18)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6.** Равенство (4.16) называется *уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки*.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7.** Равенство (4.18) называется *векторной формой уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки*.

**6. Общее уравнение** плоскости в пространстве. Применим формулу (29.8) из главы I для вычисления скалярного произведения  $(\mathbf{r}, \mathbf{n})$  в уравнении (4.8). Это даёт

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 r^i n^j g_{ij}, \quad (4.19)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты матрицы Грама для базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  (см. рисунок 4.1). На этом рисунке базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  изображён прямоугольным. Однако, в общем случае он может быть и косоугольным базисом. Обозначим

$$n_i = \sum_{j=1}^3 n^j g_{ij}. \quad (4.20)$$

Величины  $n^1, n^2$  и  $n^3$  в (4.19) и (4.20) — это координаты вектора нормали  $\mathbf{n}$  (см. рисунок 4.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8.** Величины  $n_1, n_2$  и  $n_3$ , которые получаются из координат вектора нормали  $\mathbf{n}$  по формуле (4.20) называются *ковариантными координатами* вектора  $\mathbf{n}$ .

С учётом обозначений (4.20) формула (4.19) записывается в следующем более простом виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 r^i n_i. \quad (4.21)$$

Учтём прежние обозначения (4.4) и добавим новые:

$$A = n_1, \quad B = n_2, \quad C = n_3. \quad (4.22)$$

В силу (4.4), (4.21) и (4.22) уравнение (4.8) запишется так:

$$A x + B y + C z - D = 0. \quad (4.23)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.** Равенство (4.23) называется *общим уравнением плоскости в пространстве*.

**7. Уравнение плоскости в отрезках.** Рассмотрим плоскость в пространстве, которая не проходит через начало координат, но пересекается с каждой из трёх осей координат. Перечисленные условия означают, что  $D \neq 0, A \neq 0, B \neq 0$

и  $C \neq 0$  в (4.23). Через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  на рисунке 4.2 обозначены точки пересечения плоскости с осями координат:

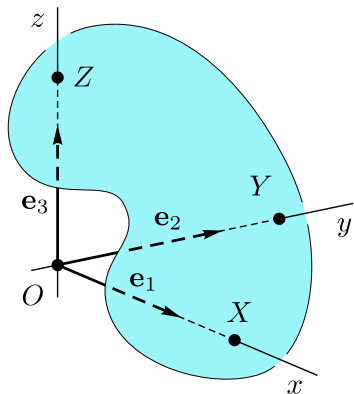


Рис. 4.2

$$\begin{aligned} X &= X(a, 0, 0), \\ Y &= Y(0, b, 0), \\ Z &= Y(0, 0, c). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  в (4.24) выражаются через параметры  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  уравнения (4.23) посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} a &= D/A, \\ b &= D/B, \\ c &= D/C. \end{aligned} \quad (4.25)$$

А само уравнение (4.23) может быть записано так:

$$\frac{x}{D/A} + \frac{y}{D/B} + \frac{z}{D/C} = 1. \quad (4.26)$$

Если учесть (4.25), то равенство (4.26) примет вид

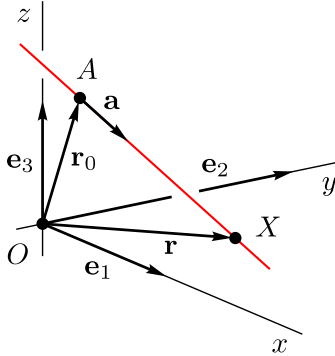
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (4.27)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10.** Равенство (4.27) называется уравнением *в отрезках* для плоскости в пространстве.

### § 5. Прямая в пространстве.

Пусть выбрана и зафиксирована некоторая прямая в пространстве  $\mathbb{E}$ . Для изучения различных видов уравнений, задающих эту прямую выберем некоторую систему координат  $O$ ,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  в пространстве  $\mathbb{E}$ . После этого точки прямой можно задавать их радиус-векторами.

**1. Векторно-параметрическое уравнение** прямой в пространстве. Рассмотрим прямую в пространстве  $\mathbb{E}$ , где вы-



брана некоторая система координат  $O, e_1, e_2, e_3$ . Обозначим через  $A$  некоторую фиксированную точку прямой (см. рисунок 5.1), а через  $X$  — произвольную точку этой прямой. Положение точки  $X$  по отношению к точке  $A$  отмечается вектором  $\overrightarrow{AX}$ , а положение точки  $A$  задаётся её радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ . Поэтому

Рис. 5.1

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{AX}. \quad (5.1)$$

Выберем и зафиксируем некоторый ненулевой вектор  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , направленный вдоль рассматриваемой прямой. Вектор  $\overrightarrow{AX}$  выражается через  $\mathbf{a}$  посредством следующей формулы:

$$\overrightarrow{AX} = \mathbf{a} \cdot t. \quad (5.2)$$

Из формул (5.1) и (5.2) немедленно получаем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a} \cdot t. \quad (5.3)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.** Равенство (5.3) называется *векторно-параметрическим уравнением* прямой в пространстве. Фиксированный вектор  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  в нём называется *направляющим вектором*, а число  $t$  — *параметром*. Фиксированный вектор  $\mathbf{r}_0$  называется *радиус-вектором начальной точки*.

Каждому значению параметра  $t$  соответствует некоторая точка на прямой. Начальной точке  $A$  соответствует нулевое значение параметра  $t = 0$ .

**2. Координатно-параметрические уравнения** прямой в пространстве. Зададим векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{a}$  в векторно-параметрическом уравнении (5.3) их координатами:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

В силу (5.4) уравнение (5.3) запишется в виде трёх уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t. \end{cases} \quad (5.5)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.** Равенства (5.5) называются *координатно-параметрическими* уравнениями прямой в пространстве. Константы  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  в них не могут выбираться равными нулю одновременно.

**3. Векторное уравнение** прямой в пространстве. Умножим обе части уравнения (5.3) векторным образом на вектор  $\mathbf{a}$ . В результате этого получим

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}] t. \quad (5.6)$$

В силу четвёртого пункта теоремы 39.1 из главы I векторное произведение  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}]$  в (5.6) равно нулю. По этой причине уравнение (5.6) фактически не содержит параметр  $t$ . Это уравнение принято записывать в виде

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0. \quad (5.7)$$

Векторное произведение двух фиксированных векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{a}$  — это векторная константа. Если обозначить  $\mathbf{b} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{a})$ , то уравнение (5.7) можно записать в виде

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}, \quad \text{где } \mathbf{b} \perp \mathbf{a}. \quad (5.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Любое из двух равенств (5.7) и (5.8) называется *векторным* уравнением прямой в пространстве. Фиксированный вектор  $\mathbf{b}$  в уравнении (5.8) должен выбираться перпендикулярным направляющему вектору  $\mathbf{a}$ .

**4. Каноническое уравнение** прямой в пространстве. Рассмотрим случай, когда  $a_x \neq 0$ ,  $a_y \neq 0$  и  $a_z \neq 0$  в уравнении (5.5). Тогда  $t$  можно выразить через  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$t = \frac{x - x_0}{a_x}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_y}, \quad t = \frac{z - z_0}{a_z}. \quad (5.9)$$

Из уравнений (5.9) можно вывести следующие равенства:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \quad (5.10)$$

Если  $a_x = 0$ , то вместо первого из уравнений (5.9) из (5.5) выводим  $x = x_0$ . Поэтому вместо (5.10) записываем

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \quad (5.11)$$

Если  $a_y = 0$ , то вместо второго из уравнений (5.9) из (5.5) выводим  $y = y_0$ . Поэтому вместо (5.10) записываем

$$y = y_0, \quad \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{z - z_0}{a_z}. \quad (5.12)$$

Если  $a_z = 0$ , то вместо третьего из уравнений (5.9) из (5.5) выводим  $z = z_0$ . Поэтому вместо (5.10) записываем

$$z = z_0, \quad \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (5.13)$$

Если  $a_x = 0$  и  $a_y = 0$ , то вместо (5.10) записываем

$$x = x_0, \quad y = y_0. \quad (5.14)$$

Если  $a_x = 0$  и  $a_z = 0$ , то вместо уравнений (5.10) записываем

$$x = x_0, \quad z = z_0. \quad (5.15)$$

Если  $a_y = 0$  и  $a_z = 0$ , то вместо уравнений (5.10) записываем

$$y = y_0, \quad z = z_0. \quad (5.16)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.** Любое из семи пар равенств (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) и (5.16) называется *каноническим* уравнением прямой в пространстве.

**5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки** в пространстве. Пусть заданы две не совпадающие точки  $A \neq B$  в пространстве. Положим

$$A = A(x_0, y_0, z_0), \quad B = B(x_1, y_1, z_1). \quad (5.17)$$

Вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  можно выбрать в качестве направляющего вектора для прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$  в (5.17). Тогда из формул (5.17) выводим

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{vmatrix}. \quad (5.18)$$

В силу (5.18) уравнения (5.10) можно записать как

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (5.19)$$

Уравнения (5.19) соответствуют случаю, когда выполнены неравенства  $x_1 \neq x_0$ ,  $y_1 \neq y_0$  и  $z_1 \neq z_0$ .

Если  $x_1 = x_0$ , то вместо (5.19) записываются уравнения

$$x = x_0 = x_1, \quad \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (5.20)$$



Если  $y_1 = y_0$ , то вместо (5.19) записываются уравнения

$$y = y_0 = y_1, \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (5.21)$$

Если  $z_1 = z_0$ , то вместо (5.19) записываются уравнения

$$z = z_0 = z_1, \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (5.22)$$

Если  $x_1 = x_0$  и  $y_1 = y_0$ , то вместо (5.19) пишутся уравнения

$$x = x_0 = x_1, \quad y = y_0 = y_1. \quad (5.23)$$

Если  $x_1 = x_0$  и  $z_1 = z_0$ , то вместо (5.19) пишутся уравнения

$$x = x_0 = x_1, \quad z = z_0 = z_1. \quad (5.24)$$

Если  $y_1 = y_0$  и  $z_1 = z_0$ , то вместо (5.19) пишутся уравнения

$$y = y_0 = y_1, \quad z = z_0 = z_1. \quad (5.25)$$

Условия  $x_1 = x_0$ ,  $y_1 = y_0$  и  $z_1 = z_0$  не могут выполняться одновременно в силу несовпадения точек  $A \neq B$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5.** Любое из семи пар равенств (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.23), (5.24) и (5.25) называется уравнением прямой в пространстве, *проходящей через две заданные точки  $A$  и  $B$  с координатами (5.17)*.

**6. Уравнение** прямой в пространстве **как пересечения двух плоскостей.** В векторной форме уравнения пересекающихся плоскостей можно записать в виде (4.8):

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2. \quad (5.26)$$

Для того, чтобы плоскости, заданные уравнениями (5.26)

фактически пересекались, их векторы нормалей должны быть неколлинеарны:  $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$ .

В координатной форме уравнения двух пересекающихся плоскостей можно записать в виде (4.23):

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z - D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z - D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6.** Любое из двух пар равенств (5.26) и (5.27) называется уравнением прямой в пространстве, полученной в пересечении двух плоскостей.

### § 6. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** *Эллипсом* называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  этой плоскости есть величина одинаковая для всех точек этого множества. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются *фокусами* эллипса.

Пусть задан эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ . Поведём прямую, соединяющую точки  $F_1$  и  $F_2$  и выберем эту прямую

за первую ось координат (ось  $x$ -ов). Обозначим через  $O$  середину отрезка  $[F_1 F_2]$  и примем точку  $O$  за начало координат. Вторую ось координат (ось  $y$ -ов) направим перпендикулярно оси  $x$ -ов (см. рисунок 6.1). Масштабы по осям выберем единичными. Это означает, что базис построенной системы координат является ортонормированным.

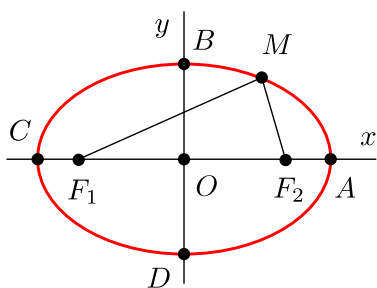


Рис. 6.1

Пусть  $M = M(x, y)$  — некоторая произвольная точка эллипса. Согласно определению 6.1 сумма  $|MF_1| + |MF_2|$  есть

константа, не зависящая от конкретного положения точки  $M$  на эллипсе. Обозначим эту константу через  $2a$  и запишем

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a. \quad (6.1)$$

Длина отрезка  $[F_1F_2]$  также есть константа. Обозначим эту константу через  $2c$ . Это даёт следующие соотношения:

$$|F_1O| = |OF_2| = c, \quad |F_1F_2| = 2c. \quad (6.2)$$

Из неравенства треугольника  $|F_1F_2| \leq |MF_1| + |MF_2|$  вытекает следующее неравенство для констант  $c$  и  $a$ :

$$c \leq a. \quad (6.3)$$

Случай  $c = a$  в (6.3) соответствует вырожденному эллипсу. В этом случае неравенство треугольника  $|F_1F_2| \leq |MF_1| + |MF_2|$  превращается в равенство  $|F_1F_2| = |MF_1| + |MF_2|$ , а сам треугольник  $MF_1F_2$  схлопывается в отрезок  $[F_1F_2]$ . Поскольку  $M \in [F_1F_2]$ , вырожденный эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  — это отрезок  $[F_1F_2]$ . Случай вырожденного эллипса принято исключать из рассмотрения при помощи неравенств

$$0 \leq c < a. \quad (6.4)$$

Формулы (6.2) определяют координаты фокусов эллипса  $F_1$  и  $F_2$  в выбранной системе координат:

$$F_1 = F_1(-c, 0), \quad F_2 = F_2(c, 0). \quad (6.5)$$

Зная координаты точек  $F_1$  и  $F_2$ , а также зная координаты точки  $M = M(x, y)$ , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \sqrt{y^2 + (x + c)^2}, \\ |MF_2| &= \sqrt{y^2 + (x - c)^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

**Вывод канонического уравнения эллипса.** Подставим формулы (6.6) в равенство (6.1), определяющее эллипс:

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} + \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a. \quad (6.7)$$

Перенесём один из корней в правую часть формулы (6.7):

$$\sqrt{y^2 + (x + c)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x - c)^2}. \quad (6.8)$$

Возведём обе части равенства (6.8) в квадрат

$$\begin{aligned} y^2 + (x + c)^2 &= 4a^2 - \\ - 4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2} + y^2 + (x - c)^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, полученное равенство (6.9) можно записать в виде

$$4a\sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 4a^2 - 4xc. \quad (6.10)$$

Сократим четвёрку в (6.10) и возведём обе части этого равенства в квадрат. В результате получим

$$a^2(y^2 + (x - c)^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2. \quad (6.11)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых равенство (6.11) можно записать следующим образом:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (6.12)$$

В обе части равенства (6.12) входит величина  $a^2 - c^2$ . В силу неравенств (6.4) эта величина положительна. Поэтому её можно записать как квадрат некоторой величины  $b > 0$ :

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (6.13)$$

В силу (6.13) равенство (6.12) можно записать в виде

$$x^2 b^2 + y^2 a^2 = a^2 b^2. \quad (6.14)$$

Поскольку  $b > 0$  и  $a > 0$  (см. неравенства (6.4)), равенство (6.14) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6.15)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Равенство (6.15) называется *каноническим* уравнением эллипса.

**ТЕОРЕМА 6.1.** Для всякой точки  $M = M(x, y)$ , лежащей на эллипсе, определяемом исходным уравнением (6.7), её координаты удовлетворяют каноническому уравнению (6.15).

Доказательством теоремы 6.1 служит проделанный выше вывод канонического уравнения эллипса (6.15). Из этого уравнения вытекают следующие важные неравенства:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b. \quad (6.16)$$

**ТЕОРЕМА 6.2.** Каноническое уравнение эллипса (6.15) эквивалентно исходному уравнению (6.7).

**ДОК-ВО.** Для доказательства теоремы 6.2 вычислим выражения (6.6) исходя из уравнения (6.15). Из (6.15) выводим

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2. \quad (6.17)$$

Подстановка (6.17) в первую формулу (6.6) даёт

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + x^2 + 2 x c + c^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + 2 x c + (b^2 + c^2)}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Теперь учтём соотношение (6.13) и запишем (6.18) так:

$$|MF_1| = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + cx}{a}\right)^2}. \quad (6.19)$$

После вычисления квадратного корня формула (6.19) даёт

$$|MF_1| = \frac{|a^2 + cx|}{a}. \quad (6.20)$$

Из неравенств (6.4) и (6.16) вытекает  $a^2 + cx > 0$ . Поэтому формулу (6.20) можно записать без использования модуля:

$$|MF_1| = \frac{a^2 + cx}{a} = a + \frac{cx}{a}. \quad (6.21)$$

В случае второй формулы (6.6) рассуждения, аналогичные приведённым выше, дают следующий результат:

$$|MF_2| = \frac{a^2 - cx}{a} = a - \frac{cx}{a}. \quad (6.22)$$

Легко видеть, что уравнение (6.7), записанное в виде  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$  в силу (6.6), немедленно вытекает из (6.21) и (6.22). Теорема 6.2 доказана.  $\square$

Рассмотрим вновь неравенства (6.16), которым удовлетворяют координаты любой точки  $M$ , лежащей на эллипсе. Первое из неравенств (6.16) обращается в равенство, когда  $M$  совпадает с  $A$  либо  $M$  совпадает с  $C$  (см. рисунок 6.1). Второе неравенство (6.16) становится равенством в случае совпадения точки  $M$  с точкой  $B$  либо с точкой  $D$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  на рисунке 6.1 называются *вершинами* эллипса. Отрезки  $[AC]$  и  $[BD]$  называются *осями* эллипса, а отрезки  $[OA]$ ,  $[OB]$ ,  $[OC]$  и  $[OD]$  — его *полуосями*.

Константы  $a$ ,  $b$  и  $c$  связаны соотношением (6.13). Из него

и из неравенств (6.4) выводим неравенства

$$0 < b \leq a. \quad (6.23)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. В силу неравенств (6.23) полуось  $[OA]$  на рисунке 6.1 называется *большой* полуосью эллипса, а полуось  $[OB]$  — *малой* полуосью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Система координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , в которой эллипс задаётся каноническим уравнением (6.15) и в которой выполняются неравенства (6.23), называется *канонической* системой координат для данного эллипса.

### § 7. Эксцентриситет и директрисы эллипса. Свойство директрис.

Форма и размеры эллипса определяются двумя константами  $a$  и  $b$  в его каноническом уравнении (6.15). В силу соотношения (6.13) константу  $b$  можно выразить через константу  $c$ . Одновременное умножение констант  $a$  и  $c$  на одно и то же число изменяет размеры эллипса, но не меняет его формы. За форму эллипса отвечает отношение двух констант

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (7.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Величина  $\varepsilon$ , определяемая соотношением (7.1), где  $a$  — длина большой полуоси, а  $c$  — половина расстояния между фокусами эллипса, называется *эксцентриситетом* эллипса.

Эксцентриситет эллипса (7.1) используется для того, чтобы задать ещё один числовой параметр эллипса  $d$ :

$$d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}. \quad (7.2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2.** В плоскости эллипса параллельно малой полуоси эллипса на расстоянии  $d$ , определяемом формулой (7.2), от его центра проходят две прямые. Эти прямые называются *директрисами* эллипса.

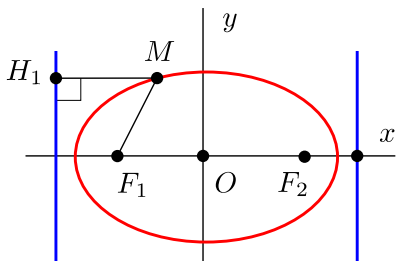


Рис. 7.1

У всякого эллипса два фокуса и две директрисы. Каждая из двух директрис имеет соответствующий ей фокус. Это тот из двух фокусов, который ближе к данной директрисе. Пусть  $M = M(x, y)$  — некоторая произвольная точка на эллипсе. Соединим эту точку с левым фокусом эллипса  $F_1$  и проведём из неё перпендикуляр к левой директрисе эллипса.

Обозначим через  $H_1$  основание такого перпендикуляра и вычислим его длину:

$$|MH_1| = |x - (-d)| = |d + x|. \tag{7.3}$$

С учётом (7.2), формулу (7.3) можно привести к виду

$$|MH_1| = \left| \frac{a^2}{c} + x \right| = \frac{|a^2 + cx|}{c}. \tag{7.4}$$

Длина отрезка  $MF_1$  была вычислена ранее. Первоначально она задавалась одной из формул (6.6), но затем для неё было выведено более простое выражение (6.20):

$$|MF_1| = \frac{|a^2 + cx|}{a}. \tag{7.5}$$

Поделим (7.5) на (7.4) и получим следующее соотношение

$$\frac{|MF_1|}{|MH_1|} = \frac{c}{a} = \varepsilon. \tag{7.6}$$

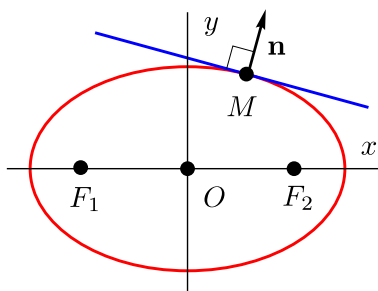


Точка  $M$  может менять своё положение на эллипсе. При этом числитель и знаменатель дроби (7.6) будут меняться, но её значение будет оставаться неизменным. Этот факт известен как свойство директрис.

**ТЕОРЕМА 7.1.** *Отношение расстояний от некоторой произвольной точки  $M$  на эллипсе до его фокуса к расстоянию от неё до соответствующей этому фокусу директрисы есть константа, равная эксцентриситету эллипса.*

### § 8. Уравнение касательной к эллипсу.

Рассмотрим эллипс, заданный каноническим уравнением (6.15) в своей канонической системе координат (см. определение 6.5). Проведём касательную к этому эллипсу и обозначим



через  $M = M(x_0, y_0)$  точку касания (см. рисунок 8.1). Наша цель — записать уравнение касательной к эллипсу.

Эллипс состоит из двух половин — верхней и нижней. Любую из этих половин эллипса можно считать графиком некоторой функции

Рис. 8.1

$$y = f(x), \quad (8.1)$$

заданной на интервале  $(-a, a)$ . Уравнение касательной к графику функции задаётся известной формулой (см. [8]):

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \quad (8.2)$$

Для применения формулы (8.2) к эллипсу надо вычислить производную функции (8.1). Подставим (8.1) в (6.15):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(f(x))^2}{b^2} = 1. \quad (8.3)$$

Равенство (8.3) выполняется тождественно по  $x$ . Продифференцируем равенство (8.3) по  $x$ . Это даёт

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2f(x)f'(x)}{b^2} = 0. \quad (8.4)$$

Используем формулу (8.4) для вычисления производной  $f'(x)$ :

$$f'(x) = -\frac{b^2 x}{a^2 f(x)}. \quad (8.5)$$

Для подстановки (8.5) в уравнение (8.2) заменим  $x$  на  $x_0$  и  $f(x)$  на  $f(x_0) = y_0$ . В результате этого получим

$$f'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \quad (8.6)$$

Подставим (8.6) в уравнение касательной (8.2). Это даёт

$$y = y_0 - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0). \quad (8.7)$$

Избавившись от знаменателя, запишем равенство (8.7) так:

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2. \quad (8.8)$$

Теперь разделим обе части равенства (8.8) на  $a^2 b^2$ :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \quad (8.9)$$

Заметим, что точка  $M = M(x_0, y_0)$  лежит на эллипсе. Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению (6.15):

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (8.10)$$

Учёт (8.10) позволяет преобразовать (8.9) к виду

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1. \quad (8.11)$$

Это и есть искомое уравнение касательной к эллипсу.

**ТЕОРЕМА 8.1.** *Касательная к эллипсу, заданному каноническим уравнением (6.15), касающаяся этого эллипса в точке  $M = M(x_0, y_0)$ , задаётся уравнением (8.11).*

Уравнение (8.11) является частным случаем уравнения (3.22), в котором константы  $A$ ,  $B$  и  $D$  даются формулами

$$A = \frac{x_0}{a^2}, \quad B = \frac{y_0}{b^2}, \quad D = 1. \quad (8.12)$$

Согласно определению 3.6 и формулам (3.21) константы  $A$  и  $B$  в (8.12) — это ковариантные компоненты вектора нормали для касательной к эллипсу. Уравнение касательной (8.11) записано в канонической системе координат эллипса, базис которой является ортонормированным. В этом случае формула (3.19) и формула (32.4) из главы I дают

$$A = n_1 = n^1, \quad B = n_2 = n^2. \quad (8.13)$$

**ТЕОРЕМА 8.2.** *Величины  $A$  и  $B$  из (8.12) являются координатами вектора нормали  $\mathbf{n}$  для касательной к эллипсу в случае, когда сама касательная задаётся уравнением (8.11).*

Соотношения (8.13) являются доказательством теоремы 8.2.

### § 9. Фокальное свойство эллипса.

Термин *фокус* хорошо известен в оптике. Им обозначают точки, в которых собираются лучи либо их продолжения после преломления в линзах или после отражения в искривлённых зеркалах. В случае эллипса предположим, что он

изготовлен из тонкой полоски гибкого материала, внутренняя сторона которой покрыта светоотражающим слоем. Для такого материализованного эллипса можно сформулировать следующее фокальное свойство.

**ТЕОРЕМА 9.1.** *Луч света, вышедший из одного фокуса эллипса, после отражения от его внутренней поверхности пройдёт через другой фокус этого эллипса.*

**ТЕОРЕМА 9.2.** *Перпендикуляр к касательной эллипса, проведённый в точке касания, является биссектрисой в треугольнике, образованном точкой касания и фокусами эллипса.*

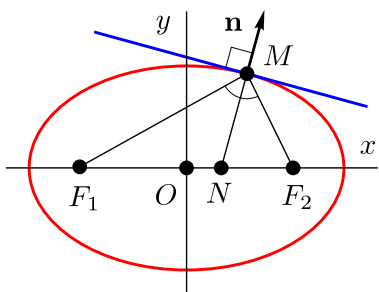


Рис. 9.1

Теорема 9.2 является геометрической формулировкой теоремы 9.1. Она учитывает закон отражения, который состоит в том, что угол падения равен углу отражения.

**ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 9.2.** Выберем точку  $M = M(x_0, y_0)$  на эллипсе и проведём через неё касательную к эллипсу. Затем проведём через точку  $M$  перпендикуляр к касательной  $[MN]$ . Отрезок  $[MN]$  направлен вдоль вектора нормали касательной. Чтобы доказать, что этот отрезок является биссектрисой в треугольнике  $F_1MF_2$  достаточно доказать равенство

$$\cos(\widehat{F_1MN}) = \cos(\widehat{F_2MN}). \quad (9.1)$$

Равенство (9.1) эквивалентно следующему равенству, записанному через скалярные произведения векторов:

$$\frac{(\overrightarrow{MF_1}, \mathbf{n})}{|MF_1|} = \frac{(\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n})}{|MF_2|}. \quad (9.2)$$

Координаты точек  $F_1$  и  $F_2$  в канонической системе коор-

динат эллипса известны (см. формулы (6.5)). Координаты точки  $M = M(x_0, y_0)$  также известны. Это позволяет найти координаты векторов  $\overrightarrow{MF_1}$  и  $\overrightarrow{MF_2}$  в (9.2):

$$\overrightarrow{MF_1} = \left\| \begin{array}{c} -c - x_0 \\ -y_0 \end{array} \right\|, \quad \overrightarrow{MF_2} = \left\| \begin{array}{c} c - x_0 \\ -y_0 \end{array} \right\|. \quad (9.3)$$

Координаты вектора нормали касательной  $\mathbf{n}$  на рисунке 9.1 определяются формулами (8.12) и (8.13):

$$\mathbf{n} = \left\| \begin{array}{c} \frac{x_0}{a^2} \\ \frac{y_0}{b^2} \end{array} \right\|. \quad (9.4)$$

Используя (9.3) и (9.4), применим формулу (33.3) из главы I для вычисления скалярных произведений в (9.2):

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MF_1}, \mathbf{n}) &= \frac{-c x_0 - x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{-c x_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}, \\ (\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n}) &= \frac{c x_0 - x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{c x_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Точка  $M = M(x_0, y_0)$  лежит на эллипсе. Поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению эллипса (6.15):

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (9.6)$$

В силу (9.6) формулы (9.5) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MF_1}, \mathbf{n}) &= \frac{-c x_0}{a^2} - 1 = -\frac{a^2 + c x_0}{a^2}, \\ (\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n}) &= \frac{c x_0}{a^2} - 1 = -\frac{a^2 - c x_0}{a^2}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Для вычисления знаменателей в формуле (9.2) используем формулы (6.21) и (6.22). Применительно к рассматриваемой в данном случае точке  $M = M(x_0, y_0)$  они дают

$$|MF_1| = \frac{a^2 + cx_0}{a}, \quad |MF_2| = \frac{a^2 - cx_0}{a}. \quad (9.8)$$

Из формул (9.7) и (9.8) легко выводим равенства

$$\frac{(\overrightarrow{MF_1}, \mathbf{n})}{|MF_1|} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{(\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n})}{|MF_2|} = -\frac{1}{a},$$

которые доказывают равенство (9.2). В итоге теорема 9.2 и эквивалентная ей теорема 9.1 доказаны.  $\square$

### § 10. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1.** *Гиперболой* называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  этой плоскости есть величина одинаковая для всех точек этого множества. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются *фокусами* гиперболы.

Пусть задана гипербола с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ . Поведём прямую, соединяющую точки  $F_1$  и  $F_2$  и выберем эту прямую за первую ось координат (ось  $x$ -ов). Обозначим через  $O$  середину отрезка  $[F_1F_2]$  и примем точку  $O$  за начало координат. Вторую ось координат (ось  $y$ -ов) направим перпендикулярно оси  $x$ -ов (см. рисунок 10.1). Масштабы по осям выберем единичными. Это означает, что базис построенной системы координат является ортонормированным.

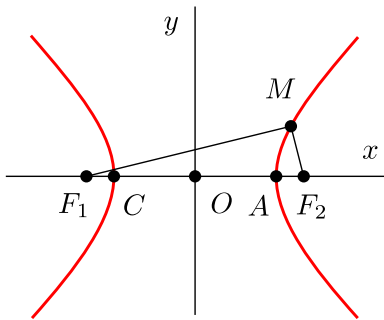


Рис. 10.1

Пусть  $M = M(x, y)$  — некоторая произвольная точка гиперболы. Согласно определению гиперболы 10.1 модуль разности  $||MF_1| - |MF_2||$  есть константа, не зависящая от конкретного места расположения точки  $M$  на гиперболе. Обозначим эту константу через  $2a$  и запишем

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a. \quad (10.1)$$

В соответствии с (10.1) точки гиперболы разделяются на два подмножества. Для одних условие (10.1) записывается как

$$|MF_1| - |MF_2| = 2a. \quad (10.2)$$

Такие точки составляют правую ветвь гиперболы. Для других условие (10.1) записывается как

$$|MF_2| - |MF_1| = 2a. \quad (10.3)$$

Эти точки составляют левую ветвь гиперболы.

Длина отрезка  $[F_1F_2]$  также есть константа. Обозначим эту константу через  $2c$ . Это даёт следующие соотношения:

$$|F_1O| = |OF_2| = c, \quad |F_1F_2| = 2c. \quad (10.4)$$

Из неравенства треугольника  $|F_1F_2| \geq ||MF_1| - |MF_2||$ , из (10.2), (10.3) и из (10.4) вытекает следующее неравенство:

$$c \geq a. \quad (10.5)$$

Случай  $c = a$  в (10.5) соответствует вырожденной гиперболе. В этом случае неравенство  $|F_1F_2| \geq ||MF_1| - |MF_2||$  превращается в равенство  $|F_1F_2| = ||MF_1| - |MF_2||$ , которое выделяет два подслучая. В первом из подслучаев равенство  $|F_1F_2| = ||MF_1| - |MF_2||$  записывается как

$$|F_1F_2| = |MF_1| - |MF_2|. \quad (10.6)$$

Равенство (10.6) означает, что треугольник  $F_1MF_2$  схлопнулся в отрезок  $[F_1M]$ , то есть точка  $M$  лежит на луче, идущем по оси  $x$ -ов вправо от точки  $F_2$  (см. рисунок 10.1).

Во втором из подслучаев, на которые разделился случай  $c = a$ , равенство  $|F_1F_2| = ||MF_1| - |MF_2||$  записывается как

$$|F_1F_2| = |MF_2| - |MF_1|. \quad (10.7)$$

Равенство (10.7) означает, что треугольник  $F_1MF_2$  схлопнулся в отрезок  $[F_1M]$ , то есть точка  $M$  лежит на луче, идущем по оси  $x$ -ов влево от точки  $F_1$  (см. рисунок 10.1).

Как видно из разобранных подслучаев, в случае  $c = a$  вырожденная гипербола представляет собой объединение двух не пересекающихся лучей, лежащих на оси  $x$ -ов и направленных в противоположные стороны.

Другой вид вырожденной гиперболы возникает при  $a = 0$ . В этом случае ветви гиперболы распрямляются и, сливаясь друг с другом, ложатся на ось  $y$ -ов.

Оба случая вырожденных гипербол принято исключать из дальнейшего рассмотрения при помощи неравенств

$$c > a > 0. \quad (10.8)$$

Формулы (10.4) определяют координаты фокусов гиперболы  $F_1$  и  $F_2$  в выбранной системе координат:

$$F_1 = F_1(-c, 0), \quad F_2 = F_2(c, 0). \quad (10.9)$$

Зная координаты точек  $F_1$  и  $F_2$ , а также зная координаты точки  $M = M(x, y)$ , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \sqrt{y^2 + (x + c)^2}, \\ |MF_2| &= \sqrt{y^2 + (x - c)^2}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

**Вывод канонического уравнения гиперболы.** Как мы установили выше, равенство (10.1), определяющее гиперболу,



распадается на два равенства (10.2) и (10.3), отвечающие двум ветвям гиперболы. Объединим эти равенства в одно:

$$|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a. \quad (10.11)$$

Подставим формулы (10.10) в равенство (10.11):

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} - \sqrt{y^2 + (x-c)^2} = \pm 2a. \quad (10.12)$$

Перенесём один из корней в правую часть формулы (10.12):

$$\sqrt{y^2 + (x+c)^2} = \pm 2a + \sqrt{y^2 + (x-c)^2}. \quad (10.13)$$

Возведём обе части равенства (10.13) в квадрат

$$\begin{aligned} y^2 + (x+c)^2 &= 4a^2 \pm \\ &\pm 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + y^2 + (x-c)^2. \end{aligned} \quad (10.14)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, полученное равенство (10.14) можно записать в виде

$$\mp 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} = 4a^2 - 4xc. \quad (10.15)$$

Сократим четвёрку в (10.15) и возведём обе части этого равенства в квадрат. В результате получим

$$a^2(y^2 + (x-c)^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2. \quad (10.16)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых равенство (10.16) можно записать следующим образом:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (10.17)$$

Внимательный читатель заметит, что проделанные вычисления почти дословно повторяют соответствующие вычисления для эллипса, а итоговая формула (10.17) полностью

совпадает с формулой (6.12). Но разница всё же есть. Она заключается в неравенствах (10.8), которые отличаются от неравенств (6.4) для эллипса.

В обе части равенства (10.17) входит величина  $a^2 - c^2$ . В силу неравенств (10.8) эта величина отрицательна. Поэтому разность  $a^2 - c^2$  можно записать как квадрат некоторой величины  $b > 0$ , взятый со знаком минус:

$$a^2 - c^2 = -b^2. \quad (10.18)$$

В силу (10.18) равенство (10.17) можно записать в виде

$$-x^2 b^2 + y^2 a^2 = -a^2 b^2. \quad (10.19)$$

Поскольку  $b > 0$  и  $a > 0$  (см. неравенства (10.8)), равенство (10.19) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10.20)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2.** Равенство (10.20) называется *каноническим* уравнением гиперболы.

**ТЕОРЕМА 10.1.** Для всякой точки  $M(x, y)$ , лежащей на гиперболы, определяемой исходными уравнениями (10.12), её координаты удовлетворяют каноническому уравнению (10.20).

Доказательством теоремы 10.1 служит проделанный выше вывод канонического уравнения гиперболы (10.20). Из этого уравнения вытекает следующее важное неравенство:

$$|x| \geq a. \quad (10.21)$$

**ТЕОРЕМА 10.2.** Каноническое уравнение гиперболы (10.20) эквивалентно исходным уравнениям (10.12).

**ДОК-ВО.** Доказательство теоремы 10.2 аналогично доказательству теоремы 6.2. Для доказательства теоремы 10.2

вычислим выражения (10.10) исходя из уравнения (10.20). Само уравнение (10.20) запишем следующим образом:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2. \quad (10.22)$$

Подстановка (10.22) в первую формулу (10.10) даёт

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 + x^2 + 2xc + c^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 + 2xc + (c^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Теперь учтём соотношение (10.18) и запишем (10.23) так:

$$|MF_1| = \sqrt{a^2 + 2xc + \frac{c^2}{a^2} x^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + cx}{a}\right)^2}. \quad (10.24)$$

После вычисления квадратного корня формула (10.24) даёт

$$|MF_1| = \frac{|a^2 + cx|}{a}. \quad (10.25)$$

Из неравенств (10.8) и (10.21) вытекает  $|cx| > a^2$ . Поэтому формулу (10.25) можно записать следующим образом:

$$|MF_1| = \frac{c|x| + \text{sign}(x) a^2}{a} = \frac{c|x|}{a} + \text{sign}(x) a. \quad (10.26)$$

В случае второй формулы (10.10) рассуждения, аналогичные приведённым выше, дают следующий результат:

$$|MF_2| = \frac{c|x| - \text{sign}(x) a^2}{a} = \frac{c|x|}{a} - \text{sign}(x) a. \quad (10.27)$$

Вычтем равенство (10.27) из равенства (10.26) и получим

$$|MF_1| - |MF_2| = 2 \text{sign}(x) a = \pm 2a. \quad (10.28)$$

Знак плюс в (10.28) получается при  $x > 0$ , что соответствует правой ветви гиперболы на рисунке 10.1. Знак минус соответствует левой ветви гиперболы. С учётом сказанного, равенство (10.28) эквивалентно равенствам (10.11), из которых выводятся равенства (10.12). Теорема 10.2 доказана.  $\square$

Вновь рассмотрим неравенство (10.21), которому удовлетворяет координата  $x$  любой точки  $M$ , лежащей на гиперболе. Неравенство (10.21) обращается в равенство, когда  $M$  совпадает с  $A$  либо когда  $M$  совпадает с  $C$  (см. рисунок 10.1).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3.** Точки  $A$  и  $C$  на рисунке 10.1 называются *вершинами* гиперболы. Отрезок  $[AC]$  называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок  $[OA]$  — *действительной полуосью*.

Константа  $a$  в уравнении гиперболы (10.20) — это длина отрезка  $[OA]$  на рисунке 10.1 (длина действительной полуоси гиперболы). А вот отрезка длины  $b$  на рисунке 10.1 нет. По этой причине константу  $b$  называют *длиной мнимой полуоси* гиперболы, которой фактически нет.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4.** Система координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , в которой гипербола задаётся каноническим уравнением (10.20), называется *канонической системой координат* для данной гиперболы.

## § 11. Эксцентриситет и директрисы гиперболы. Свойство директрис.

Форма и размеры гиперболы определяются двумя константами  $a$  и  $b$  в её каноническом уравнении (10.20). В силу соотношения (10.18) константу  $b$  можно выразить через константу  $c$ . Одновременное умножение констант  $a$  и  $c$  на одно и то же число изменяет размеры гиперболы, но не меняет её формы. За форму гиперболы отвечает отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (11.1)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1.** Величина  $\varepsilon$ , определяемая соотношением (11.1), где  $a$  — длина действительной полуоси гиперболы, а  $c$  — половина расстояния между её фокусами, называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы (11.1) используется для того, чтобы задать ещё один числовой параметр гиперболы  $d$ :

$$d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}. \quad (11.2)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2.** В плоскости гиперболы перпендикулярно действительной полуоси гиперболы на расстоянии  $d$ , определяемом формулой (11.2), от её центра проходят две прямые. Эти прямые называются *директрисами* гиперболы.

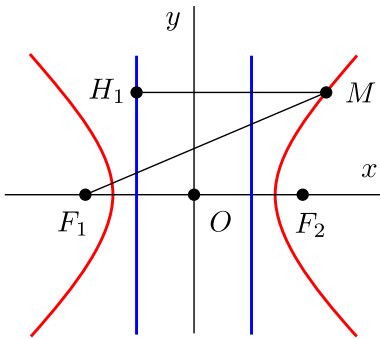


Рис. 11.1

У всякой гиперболы два фокуса и две директрисы. Каждая из двух директрис имеет соответствующий ей фокус. Это тот из двух фокусов, который ближе к данной директрисе. Пусть  $M = M(x, y)$  — некоторая произвольная точка на гиперболе. Соединим эту точку с левым фокусом гиперболы  $F_1$  и проведём из неё перпендикуляр к левой директрисе гиперболы. Обозначим че-

рез  $H_1$  основание перпендикуляра и вычислим его длину:

$$|MH_1| = |x - (-d)| = |d + x|. \quad (11.3)$$

С учётом (11.2), формулу (11.3) можно привести к виду

$$|MH_1| = \left| \frac{a^2}{c} + x \right| = \frac{|a^2 + cx|}{c}. \quad (11.4)$$

Длина отрезка  $MF_1$  была вычислена ранее. Первоначально она задавалась одной из формул (10.10), но затем для неё было выведено более простое выражение (10.25):

$$|MF_1| = \frac{|a^2 + cx|}{a}. \tag{11.5}$$

Поделим (11.5) на (11.4) и получим следующее соотношение:

$$\frac{|MF_1|}{|MH_1|} = \frac{c}{a} = \varepsilon. \tag{11.6}$$

Точка  $M$  может менять своё положение на гиперболе. При этом числитель и знаменатель дроби (11.6) будут меняться, но её значение будет оставаться неизменным. Этот факт известен как свойство директрис.

**ТЕОРЕМА 11.1.** *Отношение расстояний от некоторой произвольной точки  $M$  на гиперболе до её фокуса к расстоянию от данной точки до соответствующей этому фокусу директрисы есть константа, равная эксцентриситету гиперболы.*

### § 12. Уравнение касательной к гиперболе.

Рассмотрим гиперболу, заданную каноническим уравнением (10.20) в своей канонической системе координат (см. определение 10.4). Проведём касательную к этой гиперболе в точке  $M = M(x_0, y_0)$  (см. рисунок 12.1). Наша цель — записать уравнение касательной к гиперболе.

Гипербола состоит из двух ветвей, а каждая ветвь состоит из двух половин — верхней и нижней. Верхние половины ветвей гиперболы можно счи-

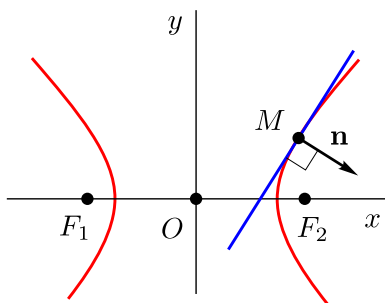


Рис. 12.1

тать графиком некоторой функции

$$y = f(x), \quad (12.1)$$

заданной на объединении двух интервалов  $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ . Нижние половинки ветвей гиперболы также можно рассматривать как график функции вида (12.1) на том же самом множестве  $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ . Уравнение касательной к графику функции (12.1) задаётся известной формулой (см. [8]):

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \quad (12.2)$$

Для применения формулы (12.2) к гиперболе надо вычислить производную функции (12.1). Подставим (12.1) в (10.20):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(f(x))^2}{b^2} = 1. \quad (12.3)$$

Равенство (12.3) выполняется тождественно по  $x$ . Продифференцируем равенство (12.3) по  $x$  и получим

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2f(x)f'(x)}{b^2} = 0. \quad (12.4)$$

Формула (12.4) позволяет вычислить производную  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \frac{b^2 x}{a^2 f(x)}. \quad (12.5)$$

Для подстановки (12.5) в уравнение (12.2) заменим  $x$  на  $x_0$  и  $f(x)$  на  $f(x_0) = y_0$ . В результате этого получим

$$f'(x_0) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \quad (12.6)$$

Подставим (12.6) в уравнение касательной (12.2). Это даёт

$$y = y_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0). \quad (12.7)$$

Избавившись от знаменателя, запишем равенство (12.7) так:

$$a^2 y y_0 - b^2 x x_0 = a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2. \quad (12.8)$$

Теперь разделим обе части равенства (12.8) на  $-a^2 b^2$ :

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}. \quad (12.9)$$

Заметим, что точка  $M = M(x_0, y_0)$  лежит на гиперболе. Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению (10.20):

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (12.10)$$

Учёт (12.10) позволяет преобразовать (12.9) к виду

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1. \quad (12.11)$$

**ТЕОРЕМА 12.1.** *Касательная к гиперболе, заданной каноническим уравнением (10.20), касающаяся этой гиперболы в точке  $M = M(x_0, y_0)$ , задаётся уравнением (12.11).*

Уравнение (12.11) является частным случаем уравнения (3.22), в котором константы  $A$ ,  $B$  и  $D$  даются формулами

$$A = \frac{x_0}{a^2}, \quad B = -\frac{y_0}{b^2}, \quad D = 1. \quad (12.12)$$

Согласно определению 3.6 и формулам (3.21) константы  $A$  и  $B$  в (12.12) — это ковариантные компоненты вектора нормали для касательной к гиперболе. Уравнение касательной (12.11) записано в канонической системе координат гиперболы, базис которой является ортонормированным. В этом случае формула (3.19) и формула (32.4) из главы I дают

$$A = n_1 = n^1, \quad B = n_2 = n^2. \quad (12.13)$$



**ТЕОРЕМА 12.2.** *Величины  $A$  и  $B$  из (12.12) являются координатами вектора нормали  $\mathbf{n}$  для касательной к гиперболе в случае, когда сама касательная задаётся уравнением (12.11).*

Соотношения (12.13) являются доказательством теоремы 12.2.

### § 13. Фокальное свойство гиперболы.

Как и в случае эллипса, предположим, что гипербола изготовлена из тонкой полоски гибкого материала, покрытого светоотражающим слоем. Для такой гиперболы можно сформулировать следующее фокальное свойство.

**ТЕОРЕМА 13.1.** *Луч света, вышедший из одного фокуса гиперболы, после отражения от её внутренней поверхности уйдёт в бесконечность, а его продолжение в противоположную сторону пройдёт через другой фокус этой гиперболы.*

**ТЕОРЕМА 13.2.** *Касательная к гиперболе является биссектрисой в треугольнике, образованном точкой касания и двумя фокусами этой гиперболы.*

Теорема 13.2 является геометрической формулировкой теоремы 13.1. Она учитывает закон отражения, который состоит

в том, что угол падения равен углу отражения.

**Док-во.** Рассмотрим точку  $M = M(x_0, y_0)$  на гиперболе и проведём через неё касательную к гиперболе (см. рисунок 13.1). Пусть  $N$  — точка пересечения касательной с осью  $x$ -ов. Точка  $N$  определяет отрезок  $[MN]$ . Этот отрезок перпендикулярен вектору нормали касательной  $\mathbf{n}$ . Чтобы до-

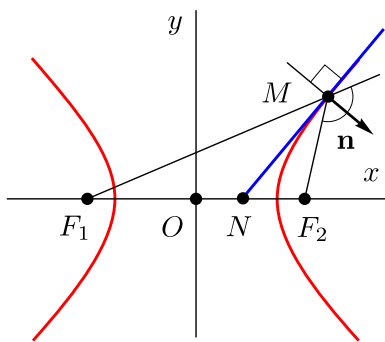


Рис. 13.1

казать, что отрезок  $[MN]$  является биссектрисой в треугольнике  $F_1MF_2$  достаточно доказать, что вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль биссектрисы к внешнему углу треугольника  $F_1MF_2$  в точке  $M$ . Это условие можно записать через скалярные произведения векторов в виде следующего равенства:

$$\frac{(\overrightarrow{F_1M}, \mathbf{n})}{|F_1M|} = \frac{(\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n})}{|MF_2|}. \quad (13.1)$$

Координаты точек  $F_1$  и  $F_2$  в канонической системе координат гиперболы известны (см. формулы (10.9)). Координаты точки  $M = M(x_0, y_0)$  также известны. Это позволяет найти координаты векторов  $\overrightarrow{F_1M}$  и  $\overrightarrow{MF_2}$  в (13.1):

$$\overrightarrow{F_1M} = \left\| \begin{array}{c} x_0 + c \\ y_0 \end{array} \right\|, \quad \overrightarrow{MF_2} = \left\| \begin{array}{c} c - x_0 \\ -y_0 \end{array} \right\|. \quad (13.2)$$

Касательная к гиперболе, которая касается гиперболы в точке  $M = M(x_0, y_0)$  задаётся уравнением (12.11). Координаты вектора нормали  $\mathbf{n}$  для такой касательной на рисунке 13.1 определяются формулами (12.12) и (12.13):

$$\mathbf{n} = \left\| \begin{array}{c} \frac{x_0}{a^2} \\ -\frac{y_0}{b^2} \end{array} \right\| \quad (13.3)$$

Используя (13.2) и (13.3), применим формулу (33.3) из главы I для вычисления скалярных произведений в (13.1):

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{F_1M}, \mathbf{n}) &= \frac{cx_0 + x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{cx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}, \\ (\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n}) &= \frac{cx_0 - x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{cx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Координаты точки  $M$  удовлетворяют уравнению (10.20):

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (13.5)$$

В силу (13.5) формулы (13.4) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{F_1M}, \mathbf{n}) &= \frac{cx_0}{a^2} + 1 = \frac{cx_0 + a^2}{a^2}, \\ (\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n}) &= \frac{cx_0}{a^2} - 1 = \frac{cx_0 - a^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Для вычисления знаменателей в формуле (13.1) используем формулы (10.26) и (10.27). Применительно к рассматриваемой в данном случае точке  $M = M(x_0, y_0)$  они дают

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \frac{c|x_0| + \text{sign}(x_0)a^2}{a}, \\ |MF_2| &= \frac{c|x_0| - \text{sign}(x_0)a^2}{a}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Заметим, что имеет место тождество  $|x_0| = \text{sign}(x_0)x_0$ . Поэтому (13.7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \frac{cx_0 + a^2}{a} \text{sign}(x_0), \\ |MF_2| &= \frac{cx_0 - a^2}{a} \text{sign}(x_0). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Из формул (13.6) и (13.8) легко выводим равенства

$$\frac{(\overrightarrow{F_1M}, \mathbf{n})}{|MF_1|} = \frac{\text{sign}(x_0)}{a}, \quad \frac{(\overrightarrow{MF_2}, \mathbf{n})}{|MF_2|} = \frac{\text{sign}(x_0)}{a},$$

которые доказывают равенство (13.1). В итоге теорема 13.2 и эквивалентная ей теорема 13.1 доказаны.  $\square$

### § 14. Асимптоты гиперболы.

Асимптотами кривой линии принято называть прямые, к которым неограниченно близко подходят точки данной кривой на некоторых её неограниченно протяжённых участках. Всякая гипербола имеет две асимптоты (см. рисунок 14.1). В канонической системе координат асимптоты гиперболы, заданной уравнением (10.20), определяются следующими уравнениями:

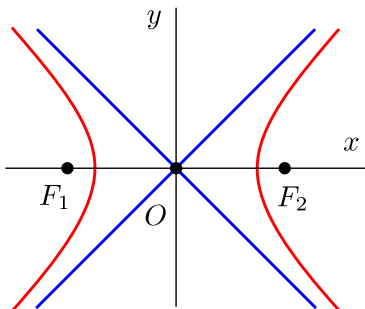


Рис. 14.1

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (14.1)$$

Одной из асимптот соответствует знак плюс в формуле (14.1), другой асимптоте соответствует знак минус.

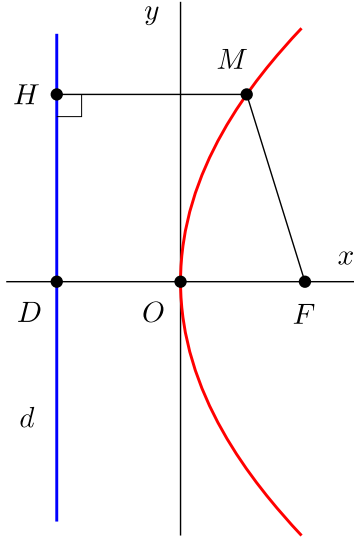
Теория асимптот тесно связана с теорией пределов. Она обычно изучается в курсе математического анализа (см. книгу [8]). По этой причине я не стану выводить здесь уравнения асимптот гиперболы (14.1).

### § 15. Парабола. Каноническое уравнение параболы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1.** *Параболой* называется множество точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки  $F$  этой плоскости и от некоторой фиксированной прямой  $d$ , лежащей в этой плоскости. Точка  $F$  называется *фокусом* параболы, а прямая  $d$  — *директрисой* параболы.

Пусть задана парабола с фокусом  $F$  и директрисой  $d$ . Опустим из точки  $F$  перпендикуляр на прямую  $d$  и обозначим через  $D$  основание такого перпендикуляра. Выберем

прямую  $DF$  в качестве первой оси координат (оси  $x$ -ов). Обозначим через  $O$  середину отрезка  $[DF]$ , примем точку  $O$  за



начало координат и проведём вторую ось координат (ось  $y$ -ов) через точку  $O$  перпендикулярно прямой  $DF$  (см. рисунок 15.1). Масштабы по осям выберем единичными. Это означает, что базис построенной системы координат является ортонормированным.

Обозначим через  $p$  расстояние от фокуса параболы до её директрисы. Тогда

$$|DF| = p. \quad (15.1)$$

Точка  $O$  — это середина отрезка  $[DF]$ . Поэтому (15.1) даёт

$$|DO| = |OF| = \frac{p}{2}. \quad (15.2)$$

Рис. 15.1

Соотношения (15.2) определяют координаты точек  $D$  и  $F$ :

$$D(-p/2, 0), \quad F(p/2, 0). \quad (15.3)$$

Пусть  $M = M(x, y)$  — некоторая произвольная точка параболы. Согласно определению 15.1 выполнено равенство

$$|MF| = |MH| \quad (15.4)$$

(см. рисунок 15.1). В силу (15.3) в выбранной системе координат длина отрезка  $[MF]$  определяется формулой

$$|MF| = \sqrt{y^2 + (x - p/2)^2}. \quad (15.5)$$

Длина отрезка  $[MH]$  даётся ещё более простой формулой

$$|MH| = x + p/2. \quad (15.6)$$

Подстановка (15.5) и (15.6) в (15.4) приводит к уравнению

$$\sqrt{y^2 + (x - p/2)^2} = x + p/2. \quad (15.7)$$

Возведём обе части уравнения (15.7) в квадрат:

$$y^2 + (x - p/2)^2 = (x + p/2)^2. \quad (15.8)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в (15.8) это уравнение приводится к виду

$$y^2 = 2px. \quad (15.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.2. Равенство (15.9) называется *каноническим* уравнением параболы.

ТЕОРЕМА 15.1. Для всякой точки  $M = M(x, y)$ , лежащей на параболе, определяемой исходным уравнением (15.7), её координаты удовлетворяют каноническому уравнению (15.9).

В силу (15.1) константа  $p$  в уравнении (15.9) есть величина неотрицательная. Случай  $p = 0$  соответствует вырожденной параболе. Из определения 15.1 нетрудно вывести, что в этом случае парабола превращается в прямую линию, совпадающую с осью  $x$ -ов на рисунке 15.1. Случай вырожденной параболы исключается при помощи неравенства

$$p > 0. \quad (15.10)$$

В силу неравенства (15.10) из уравнения (15.9) выводим

$$x \geq 0. \quad (15.11)$$

**ТЕОРЕМА 15.2.** *Каноническое уравнение параболы (15.9) эквивалентно исходному уравнению (15.7).*

**ДОК-ВО.** Для доказательства теоремы 15.2 достаточно обратиться к вычислениям, проделанным при выводе (15.9) из (15.7). Заметим, что переход от (15.8) к (15.9) обратим. Переход от (15.7) к (15.8) также является обратимым в силу неравенства (15.11), вытекающего из уравнения (15.9). Это наблюдение завершает доказательство теоремы 15.2.  $\square$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.3.** Точки  $O$  на рисунке 15.1 называются *вершиной* параболы, а прямая  $DF$ , совпадающая с осью  $x$ -ов, называется *осью* параболы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.4.** Система координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , в которой парабола задаётся каноническим уравнением (15.9) и в которой выполняется неравенство (15.10), называется *канонической системой координат* для данной параболы.

## § 16. Эксцентриситет параболы.

Определение параболы 15.1 существенно отличается от определений эллипса 6.1 и от определения гиперболы 10.1. Но оно похоже на свойство директрис эллипса в теореме 7.1 и на свойство директрис гиперболы в теореме 11.1. Сравнивая определение параболы 15.1 с этими теоремами, принято формулировать следующее определение.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1.** Эксцентриситет любой параболы постулируется равным единице:  $\varepsilon = 1$ .

## § 17. Уравнение касательной к параболе.

Рассмотрим параболу, заданную каноническим уравнением (15.9) в своей канонической системе координат (см. определение 15.4). Проведём касательную к этой параболе и обозначим через  $M = M(x_0, y_0)$  точку касания (см. рисунок 17.1).

Наша цель — записать уравнение касательной к параболе, проходящей через точку  $M = M(x_0, y_0)$ .

Парабола состоит из двух половин — верхней и нижней. Любую из этих половин параболы можно считать графиком некоторой функции

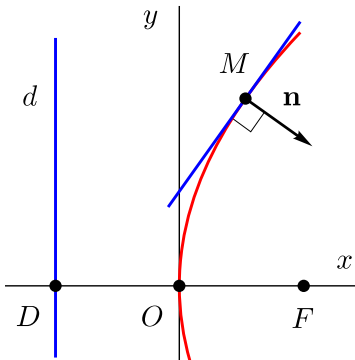


Рис. 17.1

$$y = f(x), \tag{17.1}$$

заданной на бесконечном интервале  $(0, +\infty)$ . Уравнение касательной к графику функции (17.1) известной формулой

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{17.2}$$

(см. книгу [8]). Для применения формулы (17.2) к параболе надо вычислить производную

функции (17.1). Подставим (17.1) в уравнение (15.9):

$$(f(x))^2 = 2px. \tag{17.3}$$

Равенство (17.3) выполняется тождественно по  $x$ . Продифференцируем равенство (17.3) по  $x$ . Это даёт

$$2f(x)f'(x) = 2p. \tag{17.4}$$

Используем формулу (17.4) для вычисления производной:

$$f'(x) = \frac{p}{f(x)}. \tag{17.5}$$

Заменим  $x$  на  $x_0$  и  $f(x)$  на  $f(x_0) = y_0$  и из (17.5) получим

$$f'(x_0) = \frac{p}{y_0}. \tag{17.6}$$



Подставим (17.6) в уравнение касательной (17.2). Это даёт

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0} (x - x_0). \quad (17.7)$$

Избавившись от знаменателя, запишем равенство (17.7) так:

$$y y_0 - y_0^2 = p x - p x_0. \quad (17.8)$$

Заметим, что точка  $M = M(x_0, y_0)$  лежит на параболе. Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению (15.9):

$$y_0^2 = 2 p x_0. \quad (17.9)$$

Учёт (17.9) позволяет преобразовать (17.8) к виду

$$y y_0 = p x + p x_0. \quad (17.10)$$

Это и есть искомое уравнение касательной к параболе.

**ТЕОРЕМА 17.1.** *Касательная к параболе, заданной каноническим уравнением (15.9), касающаяся этой параболы в точке  $M = M(x_0, y_0)$ , задаётся уравнением (17.10).*

Запишем уравнение касательной к параболе в следующем слегка преобразованном виде:

$$p x - y y_0 + p x_0 = 0. \quad (17.11)$$

Уравнение (17.11) является частным случаем уравнения прямой (3.22), в котором константы  $A$ ,  $B$  и  $D$  даются формулами

$$A = p, \quad B = -y_0, \quad D = p x_0. \quad (17.12)$$

Согласно определению 3.6 и формулам (3.21) константы  $A$  и  $B$  в (17.12) — это ковариантные компоненты вектора нормали для касательной к параболе. Уравнение касательной (17.11)

записано в канонической системе координат параболы. Базис канонической системы координат является ортонормированным (см. определение 15.4). В случае ортонормированного базиса формула (3.19) и формула (32.4) из главы I дают

$$A = n_1 = n^1, \quad B = n_2 = n^2. \quad (17.13)$$

**ТЕОРЕМА 17.2.** *Величины  $A$  и  $B$  из (17.12) являются координатами вектора нормали  $\mathbf{n}$  для касательной к параболе в случае, когда сама касательная задаётся уравнением (17.10).*

Соотношения (17.13) являются доказательством теоремы 17.2.

### § 18. Фокальное свойство параболы.

Предположим, что парабола изготовлена из тонкой полоски гибкого материала, покрытого светоотражающим слоем. Для такой параболы можно сформулировать следующее фокальное свойство.

**ТЕОРЕМА 18.1.** *Луч света, вышедший из фокуса параболы, после отражения от её внутренней поверхности уйдёт в бесконечность параллельно оси параболы.*

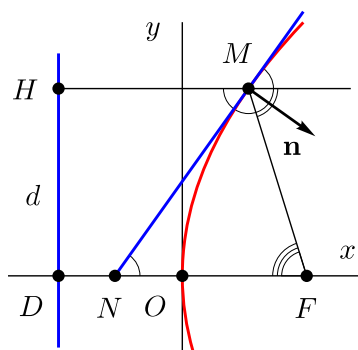


Рис. 18.1

**ТЕОРЕМА 18.2.** *Для всякой касательной к параболе треугольник, образованный точкой касания  $M$ , точкой пересечения этой касательной с осью параболы  $N$ , и фокусом параболы  $F$ , является равнобедренным, а именно имеет место равенство  $|MF| = |NF|$ .*

Как видно по рисунку 18.1, теорема 18.2 вытекает из теоремы 18.1 в силу закона отра-

жения, который говорит, что угол падения равен углу отражения, а также в силу равенства вертикальных и внутренних накрест лежащих углов в пересечении двух параллельных прямых с третьей прямой (см. [6]).

ДОК-ВО ТЕОРЕМЫ 18.2. Для доказательства теоремы выберем точку касания  $M = M(x_0, y_0)$  и запишем уравнение касательной к параболе в форме (17.10):

$$y y_0 = p x + p x_0. \quad (18.1)$$

Найдём точку пересечения касательной (18.1) с осью параболы. В канонической системе координат ось параболы совпадает с осью  $x$ -ов (см. определение 15.3). Подстановка  $y = 0$  в уравнение (18.1) даёт  $x = -x_0$ , что определяет точку  $N$ :

$$N = N(-x_0, 0). \quad (18.2)$$

Из (18.2) и (15.3) находим длину отрезка  $[NF]$ :

$$|NF| = p/2 - (-x_0) = p/2 + x_0. \quad (18.3)$$

Длина отрезка  $[MF]$  в случае параболы совпадает с длиной отрезка  $[MH]$  (см. определение 15.1). Поэтому из (15.3) выводим

$$|MF| = |MH| = x_0 - (-p/2) = x_0 + p/2. \quad (18.4)$$

Из сравнения (18.3) и (18.4) получаем требуемое равенство  $|MF| = |NF|$ . В итоге теорема 18.2 и эквивалентная ей теорема 18.1 доказаны.  $\square$

## § 19. Шкала эксцентриситетов.

Эксцентриситет эллипса определяется формулой (7.1), а параметры  $c$  и  $a$  связаны неравенствами (6.4). Поэтому эксцентриситет эллипса ограничен неравенствами

$$0 \leq \varepsilon < 1. \quad (19.1)$$

Эксцентриситет параболы равен единице по определению. Действительно, определение 16.1 даёт

$$\varepsilon = 1. \quad (19.2)$$

Эксцентриситет гиперболы определяется формулой (11.1), а параметры  $c$  и  $a$  связаны неравенствами (10.8). Поэтому эксцентриситет гиперболы ограничен неравенствами

$$1 < \varepsilon \leq +\infty. \quad (19.3)$$

Формулы (19.1), (19.2) и (19.3) показывают, что эксцентриситеты эллипса, параболы и гиперболы заполняют весь интервал от 0 до  $+\infty$  без пробелов, т. е. мы имеем непрерывную шкалу эксцентриситетов.

## § 20. Замена системы координат.

Пусть  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — две декартовы системы координат в пространстве  $\mathbb{E}$ . Они состоят из базисов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ , дополненных точками  $O$  и  $\tilde{O}$ , которые называются началами отсчёта (см. определение 1.1). Переход из базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в базис  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  и обратно описывается двумя матрицами перехода  $S$  и  $T$ , компоненты которых входят в следующие формулы перехода:

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^3 S_j^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 T_j^i \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (20.1)$$

(см. формулы (22.4) и (22.9) в главе I).

Для описания перехода из системы координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в систему координат  $\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  добавляются два новых параметра. Это векторы  $\mathbf{a} = \overrightarrow{O\tilde{O}}$  и  $\tilde{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\tilde{O}O}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.1.** Векторы  $\mathbf{a} = \overrightarrow{O\tilde{O}}$  и  $\tilde{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\tilde{O}O}$  называются *векторами сдвига начала отсчёта*.

Вектор сдвига  $\mathbf{a} = \overrightarrow{O\tilde{O}}$  принято раскладывать по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , а вектор сдвига  $\tilde{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\tilde{O}O}$  — по базису  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ :

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i, \quad \tilde{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^3 \tilde{a}^i \tilde{\mathbf{e}}_i. \quad (20.2)$$

Векторы  $\mathbf{a} = \overrightarrow{O\tilde{O}}$  и  $\tilde{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\tilde{O}O}$  противоположны друг другу, т. е. выполнены следующие соотношения:

$$\mathbf{a} = -\tilde{\mathbf{a}}, \quad \tilde{\mathbf{a}} = -\mathbf{a}. \quad (20.3)$$

Их координаты в разложениях (20.2) связаны формулами

$$\tilde{a}^i = - \sum_{j=1}^3 T_j^i a^j, \quad a^i = - \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{a}^j. \quad (20.4)$$

Формулы (20.4) вытекают из формул (20.3) с применением формул (25.4) и (25.5) из главы I.

### § 21. Пересчёт координат точки при замене системы координат.

Пусть  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  — две декартовы системы координат в пространстве  $\mathbb{E}$  и пусть  $X$  — некоторая произвольная точка в пространстве  $\mathbb{E}$ . Обозначим через

$$X = X(x^1, x^2, x^3), \quad X = X(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \quad (21.1)$$

представление точки  $X$  в рассматриваемых системах координат. Радиус векторы точки  $X$  в этих системах координат связаны следующими соотношениями:

$$\mathbf{r}_X = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{r}}_X, \quad \tilde{\mathbf{r}}_X = \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{r}_X, \quad (21.2)$$

Координаты точки  $X$  в (21.1) — это координаты соответствую-

ющих радиус-векторов в базисах своих систем координат:

$$\mathbf{r}_X = \sum_{j=1}^3 x^j \mathbf{e}_j, \quad \tilde{\mathbf{r}}_X = \sum_{j=1}^3 \tilde{x}^j \tilde{\mathbf{e}}_j. \quad (21.3)$$

Из (21.2), (21.3) и (20.2) с применением формул (25.4) и (25.5) из главы I легко выводятся следующие соотношения:

$$\tilde{x}^i = \sum_{j=1}^3 T_j^i x^j + \tilde{a}^i, \quad x^i = \sum_{j=1}^3 S_j^i \tilde{x}^j + a^i. \quad (21.4)$$

**ТЕОРЕМА 21.1.** При замене системы координат в пространстве  $\mathbb{E}$ , определяемой формулами (20.1) и (20.2), координаты точек пересчитываются по формулам (21.4).

Формулы (21.4) называются формулами *прямого и обратного пересчёта координат точки при замене декартовой системы координат*.

## § 22. Поворот прямоугольной системы координат на плоскости. Матрица поворота.

Пусть  $O$ ,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\tilde{O}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_1$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  — две декартовы системы координат на плоскости. Формулы (20.1), (20.2) и (20.4) в этом случае записываются следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^2 S_j^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^2 T_j^i \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad (22.1)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^2 a^i \mathbf{e}_i, \quad \tilde{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^2 \tilde{a}^i \tilde{\mathbf{e}}_i, \quad (22.2)$$

$$\tilde{a}^i = - \sum_{j=1}^2 T_j^i a^j, \quad a^i = - \sum_{j=1}^2 S_j^i \tilde{a}^j. \quad (22.3)$$

Пусть  $X$  — некоторая произвольная точка плоскости. Её

координаты в системах координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$  пересчитываются по формулам, аналогичным (21.4):

$$\tilde{x}^i = \sum_{j=1}^2 T_j^i x^j + \tilde{a}^i, \quad x^i = \sum_{j=1}^2 S_j^i \tilde{x}^j + a^i. \quad (22.4)$$

Пусть начала координат  $O$  и  $\tilde{O}$  совпадают. В этом случае параметры  $a^1, a^2$  и  $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2$  в формулах (22.2), (22.3), (22.3) и (22.4) равны нулю. В предположении  $O = \tilde{O}$  рассмотрим специальный случай, когда базисы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$  являются ортонормированными и когда один из них получен из другого поворотом на угол  $\varphi$  (см. рисунок 22.1). Для базисов на плоскости матрицы перехода  $S$  и  $T$  — это квадратные матри-

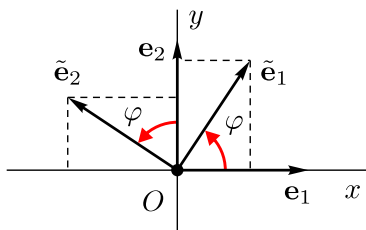


Рис. 22.1

цы размером  $2 \times 2$ . Компоненты матрицы прямого перехода  $S$  извлекаются из следующих формул:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_2, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Сами формулы (22.5) выводятся на основе рисунка 22.1.

Сравнение формул (22.5) с первым соотношением в (22.1) даёт  $S_1^1 = \cos \varphi$ ,  $S_1^2 = \sin \varphi$ ,  $S_2^1 = -\sin \varphi$ ,  $S_2^2 = \cos \varphi$ . Отсюда

$$S = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (22.6)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22.1.** Квадратная матрица вида (22.6) называется *матрицей поворота на угол  $\varphi$* .

Матрица обратного перехода  $T$  является обратной для мат-

рицы  $S$  (см. теорему 23.1 в главе I). Это обстоятельство вместе с формулой (22.6) позволяют вычислить матрицу  $T$ :

$$T = \begin{vmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{vmatrix}. \quad (22.7)$$

Матрица (22.7) также является матрицей поворота на угол  $\varphi$ . Но угол  $\varphi$  в ней взят со знаком минус, что означает, что поворот выполняется в противоположном направлении.

Запишем соотношения (22.4) с учётом  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{a}} = 0$ , что вытекает их  $O = \tilde{O}$ , и с учётом формул (22.6) и (22.7):

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= \cos(\varphi) x^1 + \sin(\varphi) x^2, \\ \tilde{x}^2 &= -\sin(\varphi) x^1 + \cos(\varphi) x^2, \end{aligned} \quad (22.8)$$

$$\begin{aligned} x^1 &= \cos(\varphi) \tilde{x}^1 - \sin(\varphi) \tilde{x}^2, \\ x^2 &= \sin(\varphi) \tilde{x}^1 + \cos(\varphi) \tilde{x}^2. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Формулы (22.8) и (22.9) — это формулы пересчёта координат точки при повороте прямоугольной системы координат, изображённом на рисунке 22.1.

### § 23. Кривые второго порядка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23.1.** *Кривой второго порядка* или *квадрикой* на плоскости называется кривая, которая в какой-либо декартовой системе координат задаётся полиномиальным уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (23.1)$$

Здесь  $x = x^1$  и  $y = x^2$  — координаты точек плоскости. Заметим, что пересчёт координат точек при переходе из одной декартовой системы координат в другую задаются функция-



ми первой степени по  $x^1$  и  $x^2$  (см. формулы (22.4)). По этой причине общий вид уравнения квадрики (23.1) не меняется при изменении системы координат, хотя значения параметров  $A, B, C, D, E$  и  $F$  при этом могут изменяться. Из сказанного вытекает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 23.1.** *Для всякой кривой второго порядка (квадрики) на плоскости существует прямоугольная система координат с ортонормированным базисом, в которой эта кривая задаётся уравнением вида (23.1).*

## § 24. Классификация кривых второго порядка.

Пусть  $\Gamma$  — кривая второго порядка на плоскости, заданная уравнением вида (23.1) в некоторой прямоугольной системе координат с ортонормированным базисом. Переходя из одной такой системы координат к другой можно изменять параметры  $A, B, C, D, E$  и  $F$ . И всегда можно подобрать систему координат, зависящую от типа выбранной кривой, в которой уравнение (23.1) принимает наиболее простой вид.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.1.** Задача о нахождении прямоугольной системы координат с ортонормированным базисом, в которой уравнение кривой второго порядка  $\Gamma$  имеет наиболее простой вид называется задачей *приведения* уравнения кривой  $\Gamma$  к *каноническому виду*.

Эллипс, гипербола и парабола являются примерами кривых второго порядка на плоскости. Канонический вид уравнения (23.1) для этих кривых нам уже известен (см. формулы (6.15), (10.20) и (15.9)).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24.2.** Задача о разделении кривых второго порядка на типы по виду их канонических уравнений называется задачей *классификации* кривых второго порядка.

**ТЕОРЕМА 24.1.** *Для всякой кривой второго порядка  $\Gamma$  существует прямоугольная система координат с ортонормированным базисом, в которой  $B = 0$  в уравнении (23.1) для  $\Gamma$ .*

Док-во. Пусть  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — прямоугольная система координат с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , в которой уравнение кривой  $\Gamma$  имеет вид (23.1) (см. теорему 23.1). Если  $B = 0$  в (23.1), то  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и есть требуемая система координат.

Если  $B \neq 0$ , то мы выполним поворот системы координат  $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  на угол  $\varphi$  вокруг точки  $O$ . Такой поворот системы координат эквивалентен замене переменных

$$\begin{aligned} x &= \cos(\varphi) \tilde{x} - \sin(\varphi) \tilde{y}, \\ y &= \sin(\varphi) \tilde{x} + \cos(\varphi) \tilde{y} \end{aligned} \quad (24.1)$$

в уравнении (23.1) (см. формулы (22.9)). После подстановки (24.1) в уравнение (23.1) получится аналогичное уравнение

$$\tilde{A} \tilde{x}^2 + 2 \tilde{B} \tilde{x} \tilde{y} + \tilde{C} \tilde{y}^2 + 2 \tilde{D} \tilde{x} + 2 \tilde{E} \tilde{y} + \tilde{F} = 0, \quad (24.2)$$

параметры  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}$  и  $\tilde{F}$  которого выражаются через параметры  $A, B, C, D, E$  и  $F$  исходного уравнения (23.1). Для параметра  $\tilde{B}$  из (24.2) имеет место формула

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= (C - A) \cos(\varphi) \sin(\varphi) + B \cos^2(\varphi) - \\ &- B \sin^2(\varphi) = \frac{C - A}{2} \sin(2\varphi) + B \cos(2\varphi). \end{aligned} \quad (24.3)$$

В силу  $B \neq 0$  определим угол  $\varphi$  как решение уравнения

$$\operatorname{ctg}(2\varphi) = \frac{A - C}{2B}. \quad (24.4)$$

Уравнение (24.4) всегда разрешимо в форме

$$\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{A - C}{2B}\right). \quad (24.5)$$

Сравнивая (24.4) и (24.3), видим, что задав  $\varphi$  формулой (24.5), мы обеспечим зануление параметра  $\tilde{B} = 0$  в повернутой

системе координат. Теорема 24.1 доказана.  $\square$

Применим теорему 24.1 и запишем уравнение кривой второго порядка  $\Gamma$  в форме (23.1) с  $B = 0$ :

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (24.6)$$

Уравнение (24.6) определяет подразделение всех кривых второго порядка на плоскости на три типа:

- **эллиптический тип**, когда  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и величины  $A$  и  $C$  одного знака, то есть  $\text{sign}(A) = \text{sign}(C)$ ;
- **гиперболический тип**, когда  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и величины  $A$  и  $C$  разных знаков, то есть  $\text{sign}(A) \neq \text{sign}(C)$ ;
- **параболический тип**, когда  $A = 0$  либо  $C = 0$ .

Одновременное зануление  $A = 0$  и  $C = 0$  в (24.6) невозможно, ибо в этом случае степень полинома в (24.6) была бы отлична от двух, что противоречит определению 23.1.

**Кривые эллиптического типа.** При выполнении условий  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и  $\text{sign}(A) = \text{sign}(C)$  без ограничения общности можно считать, что  $A > 0$  и  $C > 0$ . В этом случае уравнение (24.6) можно записать так:

$$A \left( x + \frac{D}{A} \right)^2 + C \left( y + \frac{E}{C} \right)^2 + \left( F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} \right) = 0. \quad (24.7)$$

Сделаем следующую замену переменных в уравнении (24.7):

$$x = \tilde{x} - \frac{D}{A}, \quad y = \tilde{y} - \frac{E}{C}. \quad (24.8)$$

Замена переменных (24.8) соответствует сдвигу начала отсчёта без поворота (случай единичных матриц  $S = 1$  и  $T = 1$  в формулах (22.4)). В дополнение к (24.8) введём обозначение

$$\tilde{F} = F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}. \quad (24.9)$$

С учётом (24.8) и (24.9) уравнение (24.7) записывается в виде

$$A \tilde{x}^2 + C \tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0, \quad (24.10)$$

где коэффициенты  $A$  и  $C$  положительны:  $A > 0$  и  $C > 0$ .

Уравнение (24.10) выделяет три случая при рассмотрении кривых эллиптического типа. Это

- случай **эллипса**, когда  $\tilde{F} < 0$ ;
- случай **мнимого эллипса**, когда  $\tilde{F} > 0$ ;
- случай **точки**, когда  $\tilde{F} = 0$ .

В случае эллипса уравнение (24.10) приводится к виду (6.15) в переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Оно описывает эллипс.

В случае мнимого эллипса уравнение (24.10) сводится к уравнению, которое похоже на уравнение эллипса (6.15):

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = -1. \quad (24.11)$$

Уравнение (24.11) не имеет решений. Такое уравнение описывает пустое множество.

Случай точки называют также случаем *пары мнимых пересекающихся прямых*, что не очень точно. В этом случае уравнение (24.10) описывает одну единственную точку на плоскости с координатами  $\tilde{x} = 0$  и  $\tilde{y} = 0$ .

**Кривые гиперболического типа.** При выполнении условий  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и  $\text{sign}(A) \neq \text{sign}(C)$  без ограничения общности можно считать, что  $A > 0$  и  $C < 0$ . В этом случае уравнение (24.6) можно записать в виде

$$A \left( x + \frac{D}{A} \right)^2 - \tilde{C} \left( y - \frac{E}{\tilde{C}} \right)^2 + \left( F - \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{\tilde{C}} \right) = 0, \quad (24.12)$$

где  $-C = \tilde{C} > 0$ . Введём обозначение

$$\tilde{F} = F - \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{\tilde{C}} \quad (24.13)$$

и сделаем следующую замену переменных, которая соответствует сдвигу начала отсчёта:

$$x = \tilde{x} - \frac{D}{A}, \quad y = \tilde{y} + \frac{E}{C}. \quad (24.14)$$

В силу (24.13) и (24.14) уравнение (24.12) записывается в виде

$$A \tilde{x}^2 - \tilde{C} \tilde{y}^2 + \tilde{F} = 0, \quad (24.15)$$

где коэффициенты  $A$  и  $\tilde{C}$  положительны:  $A > 0$  и  $\tilde{C} > 0$ .

Уравнение (24.15) выделяет два случая при рассмотрении кривых гиперболического типа. Это

- случай **гиперболы**, когда  $\tilde{F} \neq 0$ ;
- случай **пары пересекающихся прямых**, когда  $\tilde{F} = 0$ .

В случае гиперболы уравнение (24.15) приводится к виду (10.20) в переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Оно описывает гиперболу.

В случае пары пересекающихся прямых левая часть уравнения (24.15) записывается как произведение двух множителей и уравнение (24.15) приводится к виду:

$$(\sqrt{A} \tilde{x} + \sqrt{\tilde{C}} \tilde{y})(\sqrt{A} \tilde{x} - \sqrt{\tilde{C}} \tilde{y}) = 0. \quad (24.16)$$

Уравнение (24.16) описывает две прямые на плоскости, которые пересекаются в точке с координатами  $\tilde{x} = 0$  и  $\tilde{y} = 0$ .

**Кривые параболического типа.** Для кривых этого типа в уравнении (24.6) имеются два варианта:  $A = 0, C \neq 0$  либо  $C = 0, A \neq 0$ . Но второй вариант сводится к первому после замены переменных  $x = -\tilde{y}$ ,  $y = \tilde{x}$ , которая соответствует повороту системы координат на угол  $\varphi = \pi/2$ . Поэтому без ограничения общности можно считать, что  $A = 0$  и  $C \neq 0$ , после чего уравнение (24.6) приводится к виду

$$y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0. \quad (24.17)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (24.17) сделаем

в нём замену переменной  $y = \tilde{y} - E$ , которая соответствует сдвигу начала отсчёта вдоль оси  $y$ -ов, и обозначим  $\tilde{F} = F + E^2$ . После этого уравнение (24.17) запишется так:

$$\tilde{y}^2 + 2Dx + \tilde{F} = 0. \quad (24.18)$$

Уравнение (24.18) выделяет четыре случая при рассмотрении кривых параболического типа. Это

- случай **параболы**, когда  $D \neq 0$ ;
- случай **пары параллельных прямых**, когда  $D = 0$  и  $\tilde{F} < 0$ ;
- случай **пары совпавших прямых**, когда  $D = 0$  и  $\tilde{F} = 0$ ;
- случай **пары мнимых параллельных прямых**, когда  $D = 0$  и  $\tilde{F} > 0$ .

В случае параболы уравнение (24.18) сводится к уравнению (15.9) и описывает параболу.

В случае пары параллельных прямых в уравнении (24.18) вводится обозначение  $\tilde{F} = -y_0^2$ . После этого уравнение (24.18) записывается в следующем виде:

$$(\tilde{y} + y_0)(\tilde{y} - y_0) = 0. \quad (24.19)$$

Уравнение (24.19) описывает пару прямых, параллельных оси  $y$ -ов и отстоящих друг от друга на расстоянии  $2y_0$ .

В случае пары совпавших прямых уравнение (24.18) также сводится к виду  $\tilde{y}^2 = 0$ , которое описывает одну прямую, совпадающую с осью  $y$ -ов.

В случае пары мнимых параллельных прямых уравнение (24.18) не имеет решений. Оно описывает пустое множество.

## § 25. Поверхности второго порядка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25.1.** *Поверхностью второго порядка или квадрикой* в пространстве  $\mathbb{E}$  называется поверхность, которая

в какой-либо декартовой системе координат задаётся полиномиальным уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0. \quad (25.1)$$

Здесь  $x = x^1$ ,  $y = x^2$ ,  $z = x^3$  — координаты точек пространства. Заметим, что пересчёт координат точек при переходе из одной декартовой системы координат в другую задаются функциями первой степени по  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  (см. формулы (21.4)). По этой причине общий вид уравнения квадрики (25.1) не меняется при изменении системы координат, хотя значения параметров  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$  и  $J$  при этом могут изменяться. Из сказанного вытекает теорема.

**ТЕОРЕМА 25.1.** *Для всякой поверхности второго порядка (квадрики) в пространстве  $\mathbb{E}$  существует прямоугольная система координат с ортонормированным базисом, в которой эта поверхность задаётся уравнением вида (25.1).*

## § 26. Классификация поверхностей второго порядка.

Задачу классификации поверхностей второго порядка в пространстве  $\mathbb{E}$  будем решать в соответствии со схемой, изложенной в § 2 главы VI в книге [1]. Пусть  $S$  — поверхность второго порядка, заданная уравнением (25.1) в некоторой прямоугольной системе координат с ортонормированным базисом (см. теорему 25.1). Из параметров  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$  в уравнении (25.1) составим две матрицы

$$\mathcal{F} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} G \\ H \\ I \end{vmatrix}. \quad (26.1)$$

Матрицы (26.1) характеризуются следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 26.1.** *Для всякой поверхности второго порядка  $S$  существует прямоугольная система координат с ортонормированным базисом, в которой матрица  $\mathcal{F}$  из (26.1) диагональна, а матрица  $\mathcal{D}$  связана с матрицей  $\mathcal{F}$  соотношением  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D} = 0$ .*

Доказательство теоремы 26.1 можно найти в [1]. Пользуясь теоремой 26.1, уравнение (25.1) можно записать в виде

$$Ax^2 + Cy^2 + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0. \quad (26.2)$$

Уравнение (26.2) и теорема 26.1 определяют подразделение всех поверхностей второго порядка в  $\mathbb{E}$  на четыре типа:

- **эллиптический тип**, когда  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $F \neq 0$ , причём величины  $A$ ,  $C$  и  $F$  одного знака;
- **гиперболический тип**, когда  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $F \neq 0$ , причём величины  $A$ ,  $C$  и  $F$  разных знаков;
- **параболический тип**, когда ровно одна из величин  $A$ ,  $C$  и  $F$  равна нулю и ровно одна из величин  $G$ ,  $H$  и  $I$  отлична от нуля.
- **цилиндрический тип** во всех остальных случаях.

**Поверхности эллиптического типа.** Из условий  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $F \neq 0$  в (26.2) и из условия  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D} = 0$  в теореме 26.1 выводим  $G = 0$ ,  $H = 0$  и  $I = 0$ . В силу того, что величины  $A$ ,  $C$  и  $F$  одного знака без ограничения общности можно считать, что все они положительны. Поэтому для всех поверхностей эллиптического типа уравнение (26.2) можно записать в виде

$$Ax^2 + Cy^2 + Fz^2 + J = 0, \quad (26.3)$$

где  $A > 0$ ,  $C > 0$  и  $F > 0$ . Уравнение (26.3) выделяет три случая при рассмотрении поверхностей эллиптического типа:

- случай **эллипсоида**, когда  $J < 0$ ;
- случай **мнимого эллипсоида**, когда  $J > 0$ ;
- случай **точки**, когда  $J = 0$ .

Случай эллипсоида наиболее содержательный из трёх. В



этом случае уравнение (26.3) приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (26.4)$$

Уравнение (26.4) описывает поверхность, называемую *эллип-*

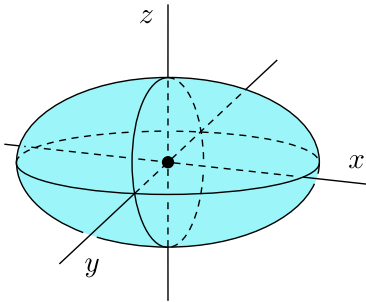


Рис. 26.1

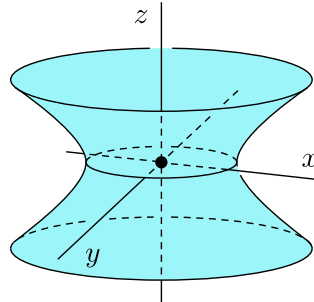


Рис. 26.2

*соидом*. Эта поверхность изображена на рисунке 26.1.

В случае мнимого эллипсоида уравнение (26.3) не имеет решений. Оно описывает пустое множество.

В случае точки уравнение (26.3) можно записать в виде, очень похожем на уравнение эллипсоида (26.4):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (26.5)$$

Уравнение (26.5) описывает одну единственную точку в пространстве  $\mathbb{E}$  с координатами  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

**Поверхности гиперболического типа.** Из трёх условий  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $F \neq 0$  в (26.2) и из условия  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D} = 0$  в теореме 26.1 выводим  $G = 0$ ,  $H = 0$  и  $I = 0$ . Величины  $A$ ,  $C$  и  $F$  разных знаков. Без ограничения общности можно считать, что две из них положительны, а одна отрицательна. Простой перестановкой осей, что не меняет прямоугольности системы координат и ортонормированности её базиса, можно добиться

того, что  $A > 0$ ,  $C > 0$  и  $F < 0$ . Таким образом, получается, что для всех поверхностей гиперболического типа уравнение (26.2) можно преобразовать к виду

$$Ax^2 + Cy^2 + Fz^2 + J = 0, \quad (26.6)$$

где  $A > 0$ ,  $C > 0$  и  $F < 0$ . Уравнение (26.6) выделяет три случая для поверхностей гиперболического типа:

- случай **однополостного гиперболоида**, когда  $J < 0$ ;
- случай **двуполостного гиперболоида**, когда  $J > 0$ ;
- случай **конуса**, когда  $J = 0$ .

В случае однополостного гиперболоида уравнение (26.6) можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (26.7)$$

Уравнение (26.7) описывает поверхность, называемую *однополостным гиперболоидом*. Она показана на рисунке 26.2.

В случае двуполостного гиперболоида уравнение (26.6) можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (26.8)$$

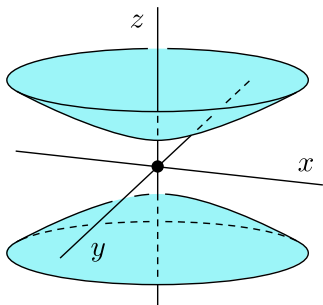


Рис. 26.3

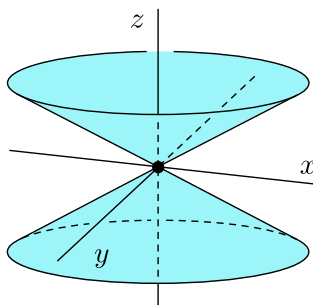


Рис. 26.4

Уравнение (26.8) описывает поверхность, называемую *двуполостным гиперболоидом*. Она показана на рисунке 26.3.

В случае конуса уравнение (26.6) приводится к уравнению, очень похожему на (26.7) и (26.8), но с нулевой правой частью:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (26.9)$$

Уравнение (26.9) описывает поверхность, называемую *конусом*. Она показана на рисунке 26.4.

**Поверхности параболического типа.** Из трёх величин  $A$ ,  $C$  и  $F$  в уравнении (26.2) для поверхностей этого типа ровно одна равна нулю. За счёт перестановки осей, что не нарушает прямоугольности системы координат и ортонормированности её базиса, можно добиться выполнения этого условия в виде  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$ ,  $F = 0$ . Из  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и из условия  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D} = 0$  в теореме 26.1 выводим  $G = 0$  и  $H = 0$ . Значение величины  $I$  условием  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{D} = 0$  не фиксируется. Однако, по определению поверхностей параболического типа из трёх величин  $G$ ,  $H$  и  $I$  ровно одна должна быть отлична от нуля. В силу  $G = 0$  и  $H = 0$  это даёт  $I \neq 0$ . В итоге уравнение (26.2) записывается в виде

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Iz + J = 0, \quad (26.10)$$

где  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и  $I \neq 0$ . Условие  $I \neq 0$  позволяет сделать сдвиг начала отсчёта по оси  $z$ , эквивалентный замене

$$z \rightarrow z - \frac{J}{2I}. \quad (26.11)$$

После применения замены переменной (26.11) к уравнению (26.10) это уравнение запишется в виде

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Iz = 0, \quad (26.12)$$

где  $A \neq 0$ ,  $C \neq 0$  и  $I \neq 0$ . Уравнение (26.12) выделяет два случая для поверхностей параболического типа:

- случай **эллиптического параболоида**, когда величины  $A \neq 0$  и  $C \neq 0$  одного знака;
- случай **гиперболического параболоида**, когда величины  $A \neq 0$  и  $C \neq 0$  разных знаков.

В случае эллиптического параболоида уравнение (26.12) можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (26.13)$$

Уравнение (26.13) описывает поверхность, называемую *эллип-*

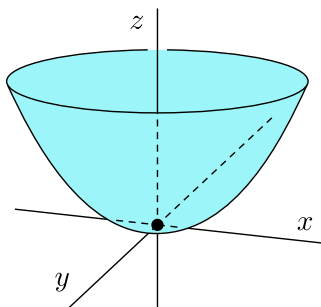


Рис. 26.5

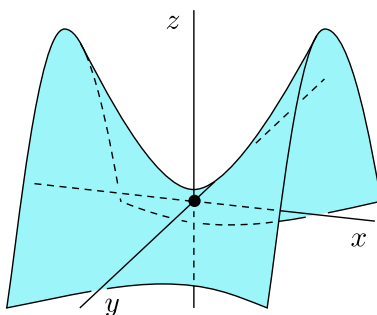


Рис. 26.6

*тическим параболоидом.* Эта поверхность изображена на рисунке 26.5.

В случае гиперболического параболоида уравнение (26.12) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (26.14)$$

Уравнение (26.14) описывает седловидную поверхность, называемую *гиперболическим параболоидом.* Эта поверхность

изображена на рисунке 26.6.

**Поверхности цилиндрического типа.** Согласно результатам из § 2 в главе VI книги [1] в цилиндрическом случае происходит редукция размерности. Это означает, что существует прямоугольная система координат с ортонормированным базисом, в котором переменная  $z$  полностью полностью исключается из уравнения (26.2):

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Gx + 2Hy + J = 0. \quad (26.15)$$

Классификация поверхностей второго порядка, описываемых уравнением (26.15), идентична классификации кривых второго порядка на плоскости, описываемых уравнением (24.6). Полный список содержит девять различных случаев:

- случай **эллиптического цилиндра**;
- случай **мнимого эллиптического цилиндра**;
- случай **прямой**;

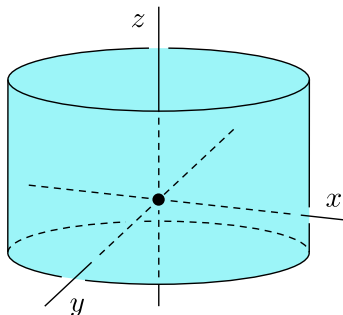


Рис. 26.7

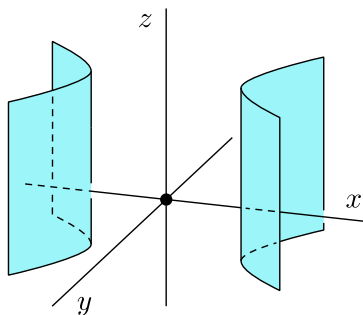


Рис. 26.8

- случай **гиперболического цилиндра**;
- случай **пары пересекающихся плоскостей**;
- случай **параболического цилиндра**;
- случай **пары параллельных плоскостей**;
- случай **пары совпавших плоскостей**;
- случай **пары мнимых параллельных плоскостей**.

В случае эллиптического цилиндра уравнение (26.15) можно преобразовать к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (26.16)$$

Уравнение (26.16) совпадает по форме с уравнением эллипса на плоскости (6.15). В пространстве оно описывает по-

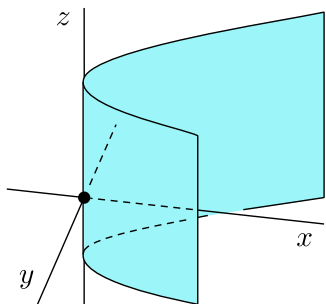


Рис. 26.9

верхность, которая называется *эллиптическим цилиндром*. Эта поверхность показана на рисунке 26.7.

В случае мнимого эллиптического цилиндра уравнение (26.15) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (26.17)$$

Уравнение (26.17) не имеет решений. Такое уравнение описывает пустое множество.

В случае прямой уравнение (26.15) можно преобразовать к следующему виду, близкому по форме к (26.16) и (26.17):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (26.18)$$

Уравнение (26.18) описывает прямую в пространстве, совпадающую с осью  $z$ . В канонической форме такая прямая описывается уравнениями  $x = 0$  и  $y = 0$  (см. (5.14)).

В случае гиперболического цилиндра уравнение (26.15) можно преобразовать к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (26.19)$$

Уравнение (26.19) по форме совпадает с уравнением гипер-

болы на плоскости (6.15). В пространстве оно описывает поверхность, называемую *гиперболическим цилиндром*. Эта поверхность изображена на рисунке 26.8.

Далее по списку следует случай пары пересекающихся плоскостей. В этом случае уравнение (26.15) допускает преобразование к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (26.20)$$

Уравнение (26.20) описывает объединение двух пересекающихся плоскостей в пространстве, задаваемых уравнениями

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \quad (26.21)$$

Плоскости (26.21) пересекаются по прямой, которая совпадает с осью  $z$  и задаётся уравнениями  $x = 0$  и  $y = 0$ .

В случае параболического цилиндра уравнение (26.15) сводится к уравнению, которое совпадает с уравнением параболы

$$y^2 = 2px. \quad (26.22)$$

В пространстве уравнение (26.22) описывает поверхность, называемую *параболическим цилиндром*. Эта поверхность изображена на рисунке 26.9.

В случае пары параллельных плоскостей уравнение (26.15) приводится к виду  $y^2 - y_0^2 = 0$ , где  $y_0 \neq 0$ , и описывает две параллельные плоскости, заданные уравнениями

$$y = y_0, \quad y = -y_0. \quad (26.23)$$

В случае пары совпавших плоскостей уравнение (26.15) также приводится к виду  $y^2 - y_0^2 = 0$ , но параметр  $y_0$  в нем оказывается равным нулю. По причине  $y_0 = 0$  две плоскости

(26.23) склеиваются в одну плоскость, которая перпендикулярна оси  $y$ -ов и задаётся уравнением  $y = 0$ .

В случае пары мнимых параллельных плоскостей уравнение (26.15) приводится к виду  $y^2 + y_0^2 = 0$ , где  $y_0 \neq 0$ . Такое уравнение не имеет решений. По этой причине оно описывает пустое множество точек.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Шарипов Р. А., *Курс линейной алгебры и многомерной геометрии*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также [math.HO/0405323](https://arxiv.org/abs/math/0405323) в электронном архиве <http://arXiv.org>.
2. Шарипов Р. А., *Курс дифференциальной геометрии*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также публикацию [math.HO/0412421](https://arxiv.org/abs/math/0412421) в электронном архиве <http://arXiv.org>.
3. Шарипов Р. А., *Теория представлений конечных групп*, БашНИИ-Строй, Уфа, 1995; см. также [math.HO/0612104](https://arxiv.org/abs/math/0612104) в электронном архиве <http://arXiv.org>.
4. Шарипов Р. А., *Классическая электродинамика и теория относительности*, БашГУ, Уфа, 1996; см. также [physics/0311011](https://arxiv.org/abs/physics/0311011) в электронном архиве <http://arXiv.org>.
5. Шарипов Р. А., *Быстрое введение в тензорный анализ*, бесплатный on-line учебник, 2004; см. также [math.HO/0403252](https://arxiv.org/abs/math/0403252) в электронном архиве <http://arXiv.org>.
6. Шарипов Р. А., *Основания геометрии для студентов и школьников*, БашГУ, Уфа, 1998; см. также [math.HO/0702029](https://arxiv.org/abs/math/0702029) в электронном архиве <http://arXiv.org>.
7. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры.*, Изд-во «Наука», Москва, 1968.
8. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*, Изд-во «Высшая школа», Москва, 1981.

## КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ.

### Адрес:

Руслан Шарипов,  
факультет Математики и  
Информационных технологий  
БашГосУниверситета,  
ул. Заки Валиди 32,  
450074 Уфа, Россия

### Телефон:

+7-(347)-273-67-18 (рабочий)  
+7-(917)-476-93-48 (сотовый)

### Интернет-сайты:

<http://ruslan-sharipov.ucoz.com>  
<http://freetextbooks.narod.ru>  
<http://sovlit2.narod.ru>

### Домашний адрес:

Руслан Шарипов,  
ул. Рабочая, дом 5,  
450003 Уфа, Россия

### Электронная почта:

r-sharipov@mail.ru  
R\_Sharipov@ic.bashedu.ru

## ПРИЛОЖЕНИЕ.

### Список публикаций автора за период с 1986-го по 2010-ой годы.

#### Часть 1. Теория солитонов.

1. Шарипов Р. А., *Конечнозонные аналоги  $N$ -мультиплетных решений уравнения КдФ*, Успехи Мат. Наук **41** (1986), № 5, 203–204.
2. Шарипов Р. А., *Солитонные мультиплеты уравнения Кортевега-де Фриза*, Доклады АН СССР **292** (1987), № 6, 1356–1359.
3. Шарипов Р. А., *Мультиплетные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили на конечнозонном фоне*, Успехи Мат. Наук **42** (1987), № 5, 221–222.
4. Bikbaev R. F., Sharipov R. A., *Magnetization waves in Landau-Lifshits model*, Physics Letters A **134** (1988), № 2, 105–108; see [solv-int/9905008](https://arxiv.org/abs/solv-int/9905008).
5. Бикбаев Р. Ф., Шарипов Р. А., *Асимптотика при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши для уравнения КдФ в классе потенциалов с конечнозонным поведением при  $x \rightarrow \pm\infty$* , ТМФ **78** (1989), № 3, 345–356.
6. Шарипов Р. А., *Об интегрировании цепочек Божоявленского*, Мат. заметки **47** (1990), № 1, 157–160.
7. Черданцев И. Ю., Шарипов Р. А., *Конечнозонные решения уравнения Булло-Додда-Жибера-Шабата*, ТМФ **82** (1990), № 1, 155–160.
8. Cherdantsev I. Yu., Sharipov R. A., *Solitons on a finite-gap background in Bullough-Dodd-Jiber-Shabat model*, International. Journ. of Modern Physics A **5** (1990), № 5, 3021–3027; see [math-ph/0112045](https://arxiv.org/abs/math-ph/0112045).
9. Sharipov R. A., Yamilov R. I., *Backlund transformations and the construction of the integrable boundary value problem for the equation  $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$* , «Задачи математической физики и асимптотика их решений», Институт Математики БНЦ УрО АН СССР, Уфа, 1991, Стр. 66–77; см. [solv-int/9412001](https://arxiv.org/abs/solv-int/9412001).

10. Шарипов Р. А., *Минимальные торы в пятимерной сфере в  $\mathbb{C}^3$* , ТМФ **87** (1991), № 1, 48–56; см. [math.DG/0204253](https://arxiv.org/abs/math/9102042).
11. Сафин С. С., Шарипов Р. А., *Автопреобразование Бэклунда для уравнения  $u_{xt} = e^u - e^{-2u}$* , ТМФ **95** (1993), № 1, 146–159.
12. Boldin A. Yu., Safin S. S., Sharipov R. A., *On an old paper of Tzitzeika and the inverse scattering method*, Journal of Mathematical Physics **34** (1993), № 12, 5801–5809.
13. Павлов М. В., Свинолупов С. И., Шарипов Р. А., *Инвариантный критерий интегрируемости для систем уравнений гидродинамического типа*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 27–48; см. Функци. Анализ и Прил. **30** (1996), № 1, 18–29; см. также [solv-int/9407003](https://arxiv.org/abs/solv-int/9407003).
14. Ферантонтов Е. В., Шарипов Р. А., *О законах сохранения первого порядка для систем уравнений гидродинамического типа*, ТМФ **108** (1996), № 1, 109–128.

## Часть 2. Геометрия нормального сдвига.

1. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **97** (1993), № 3, 386–395; см. также [chaos-dyn/9403003](https://arxiv.org/abs/chaos-dyn/9403003).
2. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Доклады РАН **334** (1994), № 2, 165–167.
3. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Многомерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, ТМФ **100** (1994), № 2, 264–269; см. также [patt-sol/9404001](https://arxiv.org/abs/patt-sol/9404001).
4. Шарипов Р. А., *Проблема метризуемости для динамических систем, допускающих нормальный сдвиг*, ТМФ **101** (1994), № 1, 85–93; см. также [solv-int/9404003](https://arxiv.org/abs/solv-int/9404003).
5. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, Успехи Мат. Наук **49** (1994), № 4, 105; см. [solv-int/9404002](https://arxiv.org/abs/solv-int/9404002).
6. Boldin A. Yu., Dmitrieva V. V., Safin S. S., Sharipov R. A., *Dynamical systems accepting the normal shift on an arbitrary Riemannian manifold*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, Ufa, 1994, pp. 4–19; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 256–266 и [hep-th/9405021](https://arxiv.org/abs/hep-th/9405021).
7. Boldin A. Yu., Bronnikov A. A., Dmitrieva V. V., Sharipov R. A., *Complete normality conditions for the dynamical systems on Riemannian manifolds*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 20–30; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 267–275 и [astro-ph/9405049](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9405049).

8. Sharipov R. A., *Higher dynamical systems accepting the normal shift*, «Dynamical systems accepting the normal shift», Bashkir State University, 1994, pp. 41–65.
9. Bronnikov A. A., Sharipov R. A., *Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in  $\mathbb{R}^n$* , «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 62–69
10. Sharipov R. A., *Metrizability by means of a conformally equivalent metric for the dynamical systems*, «Интегрируемость в динамических системах», Институт Математики УрО РАН, Уфа, 1994, Стр. 80–90; см. также ТМФ **103** (1995), № 2, 276–282.
11. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *О решении уравнений нормальности в размерности  $n \geq 3$* , Алгебра и анализ **10** (1998), № 4, 31–61; см. также [solve-int/9610006](http://solve-int/9610006).
12. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг*, диссертация на соискание ученой степени доктора наук в России, e-print [math.DG/0002202](http://math.DG/0002202) в электронном архиве <http://arXiv.org>, 2000, pp. 1–219.
13. Шарипов Р. А., *Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии*, Мат. Сборник **192** (2001), № 6, 105–144; см. также [math.DG/0006125](http://math.DG/0006125).
14. Шарипов Р. А., *Ньютоновские динамические системы, допускающие нормальное раздутие точек*, Зап. семинаров ПОМИ **280** (2001), 278–298; см. также [math.DG/0008081](http://math.DG/0008081).
15. Sharipov R. A., *On the solutions of the weak normality equations in multidimensional case*, e-print [math.DG/0012110](http://math.DG/0012110) in electronic archive <http://arXiv.org> (2000), 1–16.
16. Sharipov R. A., *First problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **30** (2002), № 9, 541–557; see also [math.DG/0101150](http://math.DG/0101150).
17. Sharipov R. A., *Second problem of globalization in the theory of dynamical systems admitting the normal shift of hypersurfaces*, e-print [math.DG/0102141](http://math.DG/0102141) in electronic archive <http://arXiv.org> (2001), 1–21.
18. Sharipov R. A., *A note on Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian dynamical systems in Riemannian manifolds*, e-print [math.DG/0107212](http://math.DG/0107212) in electronic archive <http://arXiv.org> (2001), 1–21.
19. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг, и волновые уравнения*, ТМФ **131** (2002), № 2, 244–260; см. также [math.DG/0108158](http://math.DG/0108158).
20. Sharipov R. A., *Normal shift in general Lagrangian dynamics*, e-print [math.DG/0112089](http://math.DG/0112089) in electronic archive <http://arXiv.org> (2001), 1–27.

21. Sharipov R. A., *Comparative analysis for a pair of dynamical systems one of which is Lagrangian*, e-print [math.DG/0204161](http://math.DG/0204161) in electronic archive <http://arxiv.org> (2002), 1–40.
22. Sharipov R. A., *On the concept of a normal shift in non-metric geometry*, e-print [math.DG/0208029](http://math.DG/0208029) in the archive <http://arXiv.org> (2002), 1–47.
23. Sharipov R. A., *V-representation for the normality equations in geometry of generalized Legendre transformation*, e-print [math.DG/0210216](http://math.DG/0210216) in electronic archive <http://arXiv.org> (2002), 1–32.
24. Sharipov R. A., *On a subset of the normality equations describing a generalized Legendre transformation*, e-print [math.DG/0212059](http://math.DG/0212059) in electronic archive <http://arXiv.org> (2002), 1–19.

### Часть 3. Математический анализ и теория функций.

1. Sharipov R. A., Sukhov A. B. On  $CR$ -mappings between algebraic Cauchy-Riemann manifolds and the separate algebraicity for holomorphic functions, *Trans. of American Math. Society* **348** (1996), № 2, 767–780; см. также Доклады РАН **350** (1996), № 4, 453–454.
2. Sharipov R. A., Tsyganov E. N. On the separate algebraicity along families of algebraic curves, *Preprint of Baskir State University*, Ufa, 1996, pp. 1-7; см. также *Мат. Заметки* **68** (2000), № 2, 294–302.
3. Sharipov R. A., *Algorithms for laying points optimally on a plane and a circle*, e-print [0705.0350](http://0705.0350) in the archive <http://arXiv.org> (2010), 1–6.
4. Sharipov R. A., *A note on Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print [1008.0376](http://1008.0376) in electronic archive <http://arXiv.org> (2010), 1–17.
5. Sharipov R. A., *Direct and inverse conversion formulas associated with Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print [1008.1572](http://1008.1572) in electronic archive <http://arXiv.org> (2010), 1–7.
6. Sharipov R. A., *A counterexample to Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print [1008.2738](http://1008.2738) in electronic archive <http://arXiv.org> (2010), 1–10.

### Часть 4. Симметрии и инварианты.

1. Dmitrieva V. V., Sharipov R. A., *On the point transformations for the second order differential equations*, e-print [solv-int/9703003](http://solv-int/9703003) in electronic archive <http://arXiv.org> (1997), 1–14.
2. Sharipov R. A., *On the point transformations for the equation  $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$* , e-print [solv-int/9706003](http://solv-int/9706003) in electronic archive <http://arXiv.org> (1997), 1–35; см. *Вестник БашГУ* **1(I)** (1998), 5–8.
3. Михайлов О. Н., Шарипов Р. А., *О точечном расширении одного*

класса дифференциальных уравнений второго порядка, Дифф. уравнения **36** (2000), № 10, 1331–1335; см. также [solv-int/9712001](http://arXiv.org/abs/9712001).

4. Sharipov R. A., *Effective procedure of point-classification for the equation  $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$* , [math.DG/9802027](http://arXiv.org/abs/math.DG/9802027) in electronic archive <http://arXiv.org> (1998), 1–35.
5. Дмитриева В. В., Гладков А. В., Шарипов Р. А., *О некоторых уравнениях, сводящихся к уравнениям диффузионного типа*, ТМФ **123** (2000), № 1, 26–37; см. также [math.AP/9904080](http://arXiv.org/abs/math.AP/9904080).
6. Dmitrieva V. V., Neufeld E. G., Sharipov R. A., Tsaregorodtsev A. A., *On a point symmetry analysis for generalized diffusion type equations*, e-print [math.AP/9907130](http://arXiv.org/abs/math.AP/9907130) in the archive <http://arXiv.org> (1999), 1–52.

### Часть 5. Общая алгебра.

1. Sharipov R. A., *Orthogonal matrices with rational components in composing tests for High School students*, e-print [math.GM/0006230](http://arXiv.org/abs/math.GM/0006230) in electronic archive <http://arXiv.org> (2000), 1–10.
2. Sharipov R. A., *On the rational extension of Heisenberg algebra*, e-print [math.RA/0009194](http://arXiv.org/abs/math.RA/0009194) in Electronic archive <http://arXiv.org> (2000), 1–12.
3. Sharipov R. A., *An algorithm for generating orthogonal matrices with rational elements*, e-print [cs.MS/0201007](http://arXiv.org/abs/cs.MS/0201007) in the archive <http://arXiv.org> (2002), 1–7.
4. Sharipov R. A., *A note on pairs of metrics in a two-dimensional linear vector space*, e-print [0710.3949](http://arXiv.org/abs/0710.3949) in electronic archive <http://arXiv.org> (2007), 1–9.
5. Sharipov R. A., *A note on pairs of metrics in a three-dimensional linear vector space*, e-print [0711.0555](http://arXiv.org/abs/0711.0555) in electronic archive <http://arXiv.org> (2007), 1–17.
6. Sharipov R. A., *Transfinite normal and composition series of groups*, e-print [0908.2257](http://arXiv.org/abs/0908.2257) in electronic archive <http://arXiv.org> (2010), 1–12.
7. Sharipov R. A., *Transfinite normal and composition series of modules*, e-print [0909.2068](http://arXiv.org/abs/0909.2068) in electronic archive <http://arXiv.org> (2010), 1–12.

### Часть 6. Физика твердого тела.

1. Lyuksyutov S. F., Sharipov R. A., *Note on kinematics, dynamics, and thermodynamics of plastic glassy media*, e-print [cond-mat/0304190](http://arXiv.org/abs/cond-mat/0304190) in electronic archive <http://arXiv.org> (2003), 1–19.
2. Lyuksyutov S. F., Sharipov R. A., Sigalov G., Paramonov P. B., *Exact analytical solution for electrostatic field produced by biased atomic force microscope tip dwelling above dielectric-conductor bilayer*, e-print [cond-](http://arXiv.org/abs/cond-mat/0304190)

- [mat/0408247](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2004), 1–6.
3. Lyuksyutov S. F., Sharipov R. A., *Separation of plastic deformations in polymers based on elements of general nonlinear theory*, e-print [cond-mat/0408433](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2004), 1–4.
  4. Comer J., Sharipov R. A., *A note on the kinematics of dislocations in crystals*, e-print [math-ph/0410006](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2004), 1–15.
  5. Sharipov R. A., *Gauge or not gauge*, e-print [cond-mat/0410552](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2004), 1–12.
  6. Sharipov R. A., *Burgers space versus real space in the nonlinear theory of dislocations*, e-print [cond-mat/0411148](http://arXiv.org) in the archive <http://arXiv.org> (2004), 1–10.
  7. Comer J., Sharipov R. A., *On the geometry of a dislocated medium*, e-print [math-ph/0502007](http://arXiv.org) in the archive <http://arXiv.org> (2005), 1–17.
  8. Sharipov R. A., *A note on the dynamics and thermodynamics of dislocated crystals*, e-print [cond-mat/0504180](http://arXiv.org) in the archive <http://arXiv.org> (2005), 1–18.
  9. Lyuksyutov S. F., Paramonov P. B., Sharipov R. A., Sigalov G., *Induced nanoscale deformations in polymers using atomic force microscopy*, Phys. Rev. B **70** (2004), № 174110.

#### **Часть 7. Тензорный анализ.**

1. Sharipov R. A., *Tensor functions of tensors and the concept of extended tensor fields*, e-print [math/0503332](http://arXiv.org) in the archive <http://arXiv.org> (2005), 1–43.
2. Sharipov R. A., *Spinor functions of spinors and the concept of extended spinor fields*, e-print [math.DG/0511350](http://arXiv.org) in the archive <http://arXiv.org> (2005), 1–56.
3. Sharipov R. A., *Commutation relationships and curvature spin-tensors for extended spinor connections*, e-print [math.DG/0512396](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2005), 1–22.

#### **Часть 8. Частицы и поля.**

1. Sharipov R. A., *A note on Dirac spinors in a non-flat space-time of general relativity*, e-print [math.DG/0601262](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2006), 1–22.
2. Sharipov R. A., *A note on metric connections for chiral and Dirac spinors*, e-print [math.DG/0602359](http://arXiv.org) in electronic archive <http://arXiv.org> (2006), 1–40.



3. Sharipov R. A., *On the Dirac equation in a gravitation field and the secondary quantization*, e-print [math.DG/0603367](https://arxiv.org/abs/math/0603367) in electronic archive <http://arXiv.org> (2006), 1–10.
4. Sharipov R. A., *The electro-weak and color bundles for the Standard Model in a gravitation field*, e-print [math.DG/0603611](https://arxiv.org/abs/math/0603611) in electronic archive <http://arXiv.org> (2006), 1–8.
5. Sharipov R. A., *A note on connections of the Standard Model in a gravitation field*, e-print [math.DG/0604145](https://arxiv.org/abs/math/0604145) in electronic archive <http://arxiv.org> (2006), 1–11.
6. Sharipov R. A., *A note on the Standard Model in a gravitation field*, e-print [math.DG/0605709](https://arxiv.org/abs/math/0605709) in the archive <http://arXiv.org> (2006), 1–36.
7. Sharipov R. A., *The Higgs field can be expressed through the lepton and quark fields*, e-print [hep-ph/0703001](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0703001) in the archive <http://arXiv.org> (2007), 1–4.
8. Sharipov R. A., *Comparison of two formulas for metric connections in the bundle of Dirac spinors*, e-print [0707.0482](https://arxiv.org/abs/0707.0482) in electronic archive <http://arXiv.org> (2007), 1–16.
9. Sharipov R. A., *On the spinor structure of the homogeneous and isotropic universe in closed model*, e-print [0708.1171](https://arxiv.org/abs/0708.1171) in the archive <http://arXiv.org> (2007), 1–25.
10. Sharipov R. A., *On Killing vector fields of a homogeneous and isotropic universe in closed model*, e-print [0708.2508](https://arxiv.org/abs/0708.2508) in the archive <http://arXiv.org> (2007), 1–19.
11. Sharipov R. A., *On deformations of metrics and their associated spinor structures*, e-print [0709.1460](https://arxiv.org/abs/0709.1460) in the archive <http://arXiv.org> (2007), 1–22.
12. Sharipov R. A., *A cubic identity for the Infeld-van der Waerden field and its application*, e-print [0801.0008](https://arxiv.org/abs/0801.0008) in the archive <http://arXiv.org> (2008), 1–18.
13. Sharipov R. A., *A note on Kosmann-Lie derivatives of Weyl spinors*, e-print [0801.0622](https://arxiv.org/abs/0801.0622) in electronic archive <http://arXiv.org> (2008), 1–22.
14. Sharipov R. A., *On operator fields in the bundle of Dirac spinors*, e-print [0802.1491](https://arxiv.org/abs/0802.1491) in electronic archive <http://arXiv.org> (2008), 1–14.





*Учебное издание*

**ШАРИПОВ Руслан Абдулович**

**КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**Учебное пособие**

*Редактор Г. Г. Синайская  
Корректор А. И. Николаева*

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.1999 г.*

Подписано в печать 02.11.2010 г.  
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 13,11. Уч.-изд. л. 11,62.  
Тираж 100. Изд. № 243. Заказ 69 а.

*Редакционно-издательский центр  
Башкирского государственного университета  
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке  
Башкирского государственного университета  
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*